Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemáticas y C.C.

PAUTA PEP N ° 3
ALGEBRA I I. CIVIL
(Segundo Semetre 2001)

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
   De ser verdadera,demuéstrela, caso contrario de un contraejemplo.

   a) Si a y b son enteros positivos y p es un primo tal que $p/(ab)$ entonces $p/a \vee p/b$

   Solución:

   La afirmación es VERDADERA:

   Suponer que p no divide a b y probar que p/a

   Como $p/ab \longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\star\ ab = pk$
   Por otro lado como p es primo y no divide a $b \longrightarrow (p,b) = 1$ y se tiene:

   $$p/(ab) \wedge (p,b) = 1 \longrightarrow p/a$$

   De hecho:

   Como $(p,b) = 1 \longrightarrow \exists\, x, y$ tal que $1 = p\,x + b\,y$
   multiplicando esta ecuación por a se tiene:

   $$a = 1 \cdot a = (p\,x + b\,y)a = (p\,a)x + (b\,a)y \underset{\star}{=} (p\,a)x + (p\,k)y = p(ax + ky)$$

   $$\longrightarrow a = p(ax + ky) \longrightarrow p/a$$

   b) Si A y B son matrices invertibles de orden n y tal que $A^2 = I_n$ entonces

   $$(A^t B^{-1})^t = (AB^t)^{-1}$$

   Solución:

   La afirmación es VERDADERA:

$$(A^tB^{-1})^t = (B^{-1})^tA \quad \text{(prop. de la traspuesta para el producto)}$$

$$= (B^t)^{-1}A \quad \text{(prop. de la inversa para la traspuesta)}$$

$$= (B^t)^{-1}A^{-1} \quad \text{(pues si } A^2 = I_n \text{ entonces } A = A^{-1}\text{)}$$

$$= (AB^t)^{-1}\text{(prop. de la inversa para el producto)}$$

c) Si $(a, b) = d$ entonces $\dfrac{a}{d}$ y $\dfrac{b}{d}$ son primos relativos

<u>Solución:</u>

La afirmación es VERDADERA:

Si $(a, b) = d \longrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z},\ d = ax + by \longrightarrow 1 = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}y$

Pero como $d/a \longrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ a = dm \longrightarrow \dfrac{a}{d} = m \in \mathbb{Z}$

lo mismo $d/b \longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ b = dn \longrightarrow \dfrac{b}{d} = n \in \mathbb{Z}$

y por tanto la ecuación $1 = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}y = mx + ny \longrightarrow (\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}) = 1$ es decir son primos relativos.

2. Si $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ entonces calcular $Re(z^{12} + \dfrac{1}{z})$

<u>Solución:</u>

Si $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ entonces

$$z = cos\,(5\pi/6) + i\,sen\,(5\pi/6)$$

luego

$$z^{12} = cos\,(10\pi) + i\,sen\,(10\pi) = 1$$

Por otro lado

$$\frac{1}{z} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

(no olvide que si $z = a + bi \longrightarrow z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{bi}{a^2 + b^2}$)

$$\longrightarrow \quad z^{12} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \longrightarrow Re(z^{12} + \frac{1}{z}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Descomponer en fracciones parciales el cuociente $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde:

$$p(x) = x^2 + 1 \text{ y } q(x) = x^4 + x^3 + x^2$$

Solución:

Usando fracciones parciales se tiene que:

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1} = \frac{(A+C)x^3+(A+B+D)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x^2+x+1)}$$

Por igualdad de polinomios:

$$A + C = 0, \quad A + B + D = 1, \quad A + B = 0, \quad B = 1$$

es decir:

$$A = -1, \ \ B = 1, \ \ C = 1 \ \ D = 1$$

Y finalmente :

$$\frac{x^2+1}{x^2(x^2+x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

4. Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y-z &=& 2 \\ x+2y+z &=& 3 \\ x+y+(\alpha^2-5)z &=& \alpha \end{array}\right|$$

   a) Encuentre $S = \{\ \alpha \in \mathbb{R}\ /\ \text{ el sistema tenga única solución}\}$
      Encuentre dicha solución

      Solución:

      Considere la matriz aumentada del sistema : (A/B)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \alpha^2-5 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow[O.E.F]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \end{array}\right)$$

el sistema tiene única solución si y sólo si $\rho(A) = \rho(A/B) = 3$

$$\longrightarrow \alpha^2 - 4 \neq 0 \ \wedge \ \alpha - 2 \neq 0 \longrightarrow \alpha \neq 2 \ \wedge \ \alpha \neq -2$$

Por tanto $\qquad S = \{\ \alpha \in \mathbb{R} \ /\alpha \neq 2 \ \wedge \ \alpha \neq -2\}$

Si $\alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq -2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \end{array}\right) \xrightarrow[O.E.F]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{\alpha+5}{\alpha+2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{\alpha}{\alpha+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{\alpha+2} \end{array}\right)$

$$\longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\alpha+5}{\alpha+2} \\ y = \dfrac{\alpha}{\alpha+2} \\ z = \dfrac{1}{\alpha+2} \end{cases} \qquad \text{única solución del sistema}$$

$b)$ Encuentre $\quad S = \{\ \alpha \in \mathbb{R} \ /\ $ el sistema no tenga solución$\}$

<u>Solución:</u>

Si $\alpha = -2$ el sistema no tiene solución ya que en ese caso

$\rho(A) < \rho(A/B)$ de hecho:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \end{array}\right) \xrightarrow[\alpha=-2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Por tanto $\qquad S = \{\ \alpha \in \mathbb{R} \ /\alpha = -2\}$

(Si $\alpha = 2$ el sistema tiene infinitas soluciones ya que $\quad \rho(A) = \rho(A/B) = 2$)