

Universidad de Santiago de Chile
 Facultad de Ciencia
 Depto. de Matemáticas y C.C.

Pauta PEP N° 1
 ALGEBRA I. CIVIL
 (primer semestre 2002)

(1) Demuestre que la proposición

$$[(\sim p \vee q) \implies r) \wedge (r \implies (s \vee t)) \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (\sim u \implies \sim t)] \implies p$$
 es una tautología

Solución:

Sea $X = [(\sim p \vee q) \implies r) \wedge (r \implies (s \vee t)) \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (\sim u \implies \sim t)]$

Entonces se tiene:

$X \xrightarrow{\text{silogismo}} \{(\sim p \vee q) \implies (s \vee t)\} \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (t \implies u)$

$\xrightarrow{\text{asociatividad}} \{(\sim p \vee q) \implies (s \vee t)\} \wedge \sim s \wedge (\sim u \wedge (t \implies u))$

$\xrightarrow{\text{M. Tollens}} \{(\sim p \vee q) \implies (s \vee t)\} \wedge \sim s \wedge \sim t$

$\implies (\sim p \vee q) \implies (s \vee t) \wedge \sim (s \vee t)$

$\xrightarrow{\text{M. Tollens}} \sim (\sim p \vee q)$

$\implies p \wedge \sim q$

$\implies p$

Luego como X implica p entonces se tiene que :

$X \implies p$ es una tautología

OBS: válido dem usando tablas de verdad.

(2) Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ tal que $a_k = 2k(2k + 1)$ entonces calcule:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Solución:

Sea $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \cdots + a_n$ donde:

$$a_1 = 2 \cdot 3 = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$$

$$a_2 = 4 \cdot 5 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 + 1)$$

$$a_3 = 6 \cdot 7 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 + 1)$$

$$a_4 = 8 \cdot 9 = (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 4 + 1)$$

\vdots

$$a_k = (2 \cdot k) \cdot (2 \cdot k + 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_n &= \sum_{k=1}^n (2k)(2k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n [4k^2 + 2k] \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

(3) Usando inducción, demostrar que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^n j(j+1)(j+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Solución:

Sea

$$p(n) : \sum_{j=1}^n j(j+1)(j+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$p(1) : \sum_{j=1}^1 j(j+1)(j+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$$

$$1(1+1)(1+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$$

$$6 = 6$$

Es claro que $p(1)$ se cumple.

ii) Suponer que $p(k)$ verdadero, por demostrar $p(k+1)$.

$$p(k+1) : \sum_{j=1}^{k+1} j(j+1)(j+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} j(j+1)(j+2) &= \sum_{j=1}^k j(j+1)(j+2) + (k+1)(k+1+1)(k+1+2) \\ &\stackrel{\text{Hip. Ind}}{=} \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) \\ &= (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{k}{4} + 1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \end{aligned}$$

Así $p(k+1)$ se cumple, y $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadero.

(4) Sea $\{a_n\}$ una una progresión geométrica de razón 2 y tal que:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + 768 = 1533$$

Calcular

$$\sum_{i=1}^7 a_i$$

Solución:

Sea $r = 2 \wedge S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + 768 = 1533 \longrightarrow a_n = 768$

Necesitamos conocer a_1 y n .

Como $\{a_n\}$ una una progresión geométrica de razón 2, entonces:

$$\bullet S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = a_1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = a_1 \cdot (2^n - 1)$$

$$\bullet a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\bullet 1533 = a_1 \cdot (2^n - 1)$$

$$\bullet 768 = a_1 \cdot 2^{n-1}$$

Y de las dos últimas igualdades se tiene:

$$\frac{1533}{768} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{511}{256} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$$

$$256 \cdot 2^n - 256 = 511 \cdot 2^{n-1}$$

$$256 \cdot 2^n - 256 = \frac{511 \cdot 2^n}{2}$$

$$512 \cdot 2^n - 512 = 511 \cdot 2^n$$

$$2^n = 512 \longrightarrow 2^n = 2^9 \longrightarrow n = 9$$

$$\longrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 + 768 = \sum_{i=1}^9 a_i = 1533$$

$$\longrightarrow 768 = a_1 \cdot 2^8 \longrightarrow a_1 = \frac{768}{256} \longrightarrow a_1 = 3 \longrightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{Así } \sum_{i=1}^7 a_i = \sum_{i=1}^9 a_i - (a_8 + a_9) = 1533 - 3 \cdot 2^{8-1} - 768$$

Tiempo: 90 minutos
Cada pregunta vale 1,5 puntos