

Universidad de Santiago de Chile  
Facultad de Ciencia  
Depto. de Matemáticas y C.C.

**PAUTA PEP N ° 1**  
**ALGEBRA I. CIVIL**  
(primer semestre 2001)

(1) (a) Usando inducción, demostrar que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{4^n}$$

Demostración:

$$\text{Sea } p(n) : \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{4^n}$$

por demostrar

$$p(1) : \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4}$$

Es claro que  $p(1)$  se cumple.

Suponer que  $p(k)$  verdadero, por demostrar  $p(k+1)$ .

$$p(k+1) : \sum_{j=1}^{2(k+1)+1} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{4^{k+1}}$$

Dem:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2k+2} \frac{1}{2^j} &= \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2}} \\ &= 1 - \frac{1}{4^k} + \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2}} \\ &= 1 - \frac{1}{4^k} + \frac{1}{2 \cdot 4^k} + \frac{1}{4 \cdot 4^k} \\ &= 1 + \frac{1}{4^k} \left( -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^k} \end{aligned}$$

Así  $p(k+1)$  se cumple, y  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p(n)$  es verdadero.

(b) Usando el teorema del binomio se tiene que:

$$\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (x\sqrt{x})^{11-k} \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} x^{\frac{11}{2}(k-3)}$$

Así el término independiente de  $x$  se obtiene cuando  $\frac{11}{2}(k-3) = 0$

es decir cuando  $k = 3$  y es igual a:  $\binom{11}{3}$

(2) (a) R es refleja.  $(a, b)R(a, b) \iff b - b = 2(a - a)$

R es simétrica. Suponga que  $(a, b)R(c, d)$ , entonces se cumple que:

$d - b = 2(c - a)$  y ahora multiplique por  $-1$  y se obtiene  $b - d = 2(a - c)$

es decir,  $(c, d)R(a, b)$ .

R es transitiva. Si  $(a, b)R(c, d)$  y  $(c, d)R(e, f)$  entonces se tiene:

$$d - b = 2(c - a) \quad \text{y} \quad f - d = 2(e - c)$$

Ahora basta sumar ambas ecuaciones y se obtiene:

$$f - b = 2(e - a) \quad \text{es decir} \quad (a, b)R(e, f)$$

(b)  $(1, \bar{2}) = \{(a, b) / (a, b)R(1, 2)\} = \{(a, b) / 2 - b = 2(1 - a)\} = \{(a, b) / b = 2a\}$

Es decir;  $(1, \bar{2}) = \{(a, 2a) / a \in \mathbb{R}\}$

(3) Como  $A$  es una P.A entonces se tiene:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n} = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d)$$

Pero:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n} = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n})$$

es decir

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n} = 24 + 30 = 54$$

Por lo que:

$$\frac{2n}{2}(2a_1 + (2n - 1)d) = 54$$

$$\frac{2n}{2}(a_1 + a_1 + (2n - 1)d) = 54$$

$$\frac{2n}{2}(a_1 + a_{2n}) = 54 \quad (\text{ya que } a_1 + (2n - 1)d = a_{2n})$$

Y como

$$a_{2n} = a_1 + \frac{21}{2} \quad \text{y} \quad a_1 = \frac{3}{2}$$

entonces reemplazando en la última ecuación se tiene:

$$n\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{21}{2}\right) = 54 \quad \text{de donde } n = 4$$

y con esto se concluye que la P.A tiene 8 términos.