Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemáticas y C.C.

PAUTA - PAS - ALGEBRA I ING. CIVIL

(primer semestre 2001)

(1) (a) Demostrar que:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$$

Demostración:

Se sabe que:

$$\begin{array}{rrcl} & \cos(2\theta) & = & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \longrightarrow & \sin^2(\theta) & = & \cos^2(\theta) - \cos(2\theta) \\ & & = & 1 - \sin^2(\theta) - \cos(2\theta) \\ \longrightarrow & 2\sin^2(\theta) & = & 1 - \cos(2\theta) \\ \longrightarrow & \sin^2(\theta) & = & \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2} \end{array}$$

Haga $\theta = \frac{\alpha}{2}$ y en ese caso se tiene:

$$\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$$

(b) Determine la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto $P = (1, \sqrt{3})$

Solución:

Sea r el radio de la circunferencia que tiene centro en el origen entonces la ecuación de dicha circunferencia es de la forma:

$$\natural \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Por otro lado como el punto $P = (1, \sqrt{3})$ pertenece a la circunferencia entonces P satisface la ecuación $\natural$ es decir se cumple:

$$1^2 + \sqrt{3}^2 = r^2 \longrightarrow r = 2$$

Luego la ecuación pedida es:

$$x^2 + y^2 = 4$$

(2) Sean R_1, R_2 dos relaciones de <u>orden</u> definidas en los conjuntos A y B respectivamente.
Se define en $A \times B$ la relación R como sigue:

$$(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow a\,R_1\,c \wedge b\,R_2\,d$$

Demostrar que R también es relación de orden.

<u>Demostración:</u>

Debemos probar que R es refleja , antisimétrica y transitiva.

<u>refleja:</u>

$$(a,b)\,R\,(a,b),\ \forall\,(a,b) \in A \times B \text{ ya que:}$$

$$a\,R_1\,a, \forall a \in A \text{ y } b\,R_2\,b, \forall b \in B, \text{por ser } R_1 \text{ y } R_2 \text{ relaciones reflejas}$$

<u>antisimétrica:</u>
Suponer que :

$$\begin{array}{ccc} (a,b)R(c,d) & \wedge & (c,d)R(a,b) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a\,R_1\,c \wedge b\,R_2\,d & \wedge & c\,R_1\,a \wedge d\,R_2\,b \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a\,R_1\,c \wedge c\,R_1\,a & \wedge & b\,R_2\,d \wedge d\,R_2\,b \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a = c & \wedge & b = d \end{array} \qquad (R_1, R_2 \text{ son antis.})$$

Luego se tiene: $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(a,b) \Longrightarrow (a,b) = (c,d)$, es decir R es antisimétrica.

<u>transitiva:</u>

Suponer que :

$$\begin{array}{ccc}
(a,b)R(c,d) & \wedge & (c,d)R(e,f) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
a\,R_1\,c \wedge b\,R_2\,d & \wedge & c\,R_1\,e \wedge d\,R_2\,f \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
a\,R_1\,c \wedge c\,R_1\,e & \wedge & b\,R_2\,d \wedge d\,R_2\,f \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
a\,R_1\,e & \wedge & b\,R_2\,f \qquad (R_1, R_2 \text{ son transit.}) \\
 & \Downarrow & \\
 & (a,b)R(e,f) &
\end{array}$$

Asi se tiene: $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Longrightarrow (a,b)R(e,f)$ con lo que se prueba que R es transitiva.

De todo lo anterior se concluye que R es una relación de orden.

(3) Sea $T : (M_{\mathbb{R}}(n), +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ una función, tal que: $T(A) = tr(A)$

(a) Demostrar que T es un Homomorfismo.

<u>Demostración:</u>

Sean A y B matrices en $M_{\mathbb{R}}(n)$, entonces:

$$\begin{aligned}
T\,(A+B) &= tr(A+B) \\
&= tr(A) + tr(B) \qquad \text{(la traza es aditiva)} \\
&= T(A) + T(B)
\end{aligned}$$

(b) Demuestre que T es sobreyectivo.

<u>Demostración:</u>

Considere la matriz $A = (a_{ij})$ de orden n y tal que:

$$a_{nn} = x - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{n-1n-1}) \Longrightarrow tr(A) = x$$

Luego $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \exists A \in M_{\mathbb{R}}(n) \,/\, T(A) = x$

(c) Determine $ket(T)$

<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned} Ker(T) &= \{A \in M_{\mathbb{R}}(n) \ / \ T(A) = 0\} \\ &= \{A \in M_{\mathbb{R}}(n) \ / \ tr(A) = 0\} \\ &= \{A \in M_{\mathbb{R}}(n) \ / \ a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0\} \end{aligned}$$

Es claro que T no es $1-1$. Contraejemplo : basta tomar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ tr(A) = 0 \text{ y } tr(B) = 0$$

(4) Usando inducción, demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n} (k^2+1)k! = n(n+1)!$$

<u>Demostración:</u>

Sea

$$p(n) : \sum_{k=1}^{n} (k^2+1)k! = n(n+1)!$$

$i)$

$$\begin{array}{ccc} p(1) : \displaystyle\sum_{k=1}^{1} (k^2+1)k! & = & 1(1+1)! \\ \downarrow & & \downarrow \\ (1^2+1)1! & = & 1(1+1)! \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 & = & 2 \end{array}$$

por tanto p(1) es una proposición verdadera.

ii)Ahora suponer $p(n)$ verdadera.
Por demostrar :

$$p(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} (k^2+1)k! = (n+1)(n+2)!$$

<u>Demostración:</u>

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(k^2+1)k! &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! + \left((n+1)^2+1\right)(n+1)! \\
&= n(n+1)! + ((n+1)^2+1)(n+1)! \\
&= (n+1)!\,(n+n^2+2n+2) \\
&= (n+1)!(n^2+3n+2) \\
&= (n+1)(n+2)!
\end{aligned}$$

Asi se tiene que $p(n+1)$ es verdadera y portanto $\forall n \in \mathbb{N}$ p(n) es verdadera.