UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Prof. Gabriel Rabanales R.

GUIA 1 DE RELACIONES

1. Sea R una relación de equivalencia y suponga que cRa y cRb.
   Demostrar que: aRb
   Solución:
   Como cRa, también aRc (por la propiedad simétrica).
   Como aRc y cRb, entonces aRb (por la propiedad transitiva).

2. Sean A, B y C conjuntos, y $T \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C, R \subseteq B \times C$, tres relaciones.
   Demuestre que: $(R \cup S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cup (S \circ T)$
   Demostración:
   Sea $(a,b) \in (R \cup S) \circ T$. Debemos demostrar que $(a,b) \in (R \circ S) \cup (S \circ T)$

$$
\begin{aligned}
(a,b) \in (R \cup S) \circ T &\Rightarrow \exists c \in B \text{ tal que } (a,c) \in T \wedge (c,b) \in R \cup S \\
&\Rightarrow (a,c) \in T \wedge ((c,b) \in R \vee (c,b) \in S) \\
&\Rightarrow ((a,c) \in T \wedge (c,b) \in R) \vee ((a,c) \in T \wedge (c,b) \in S) \\
&\Rightarrow (a,b) \in R \circ T \vee (a,b) \in S \circ T \\
&\Rightarrow (a,b) \in (R \circ T) \cup (S \circ T)
\end{aligned}
$$

3. Definimos “~” en $¥^2$ por $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$
   a) Demuestre que “~” es relación de equivalencia
   b) Determine $\overline{(1,2)}$
   Solución:
   a) Como $(a,b) \sim (a,b)$ ya que $a + b = b + a$, entonces ~ es refleja
   Si $(a,b) \sim (c,d)$ entonces $a + d = b + c$, de aquí concluimos que $d + a = c + b$; es decir tenemos que $(c,d) \sim (a,b)$, con lo cual “~” es relación simétrica.
   Si $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f)$ debemos demostrar que $(a,b) \sim (e,f)$
   Como $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f)$ entonces $a + d = b + c \wedge c + f = d + e$.
   Sumando estas dos expresiones obtenemos $a + d + c + f = b + c + d + e$,
   y cancelando obtenemos $a + f = b + e$, es decir: “~” es relación transitiva

   b)
$$
\begin{aligned}
\overline{(1,2)} &= \{ (x,y) / (x,y) \sim (1,2) \} \\
&= \{ (x,y) / x + 2 = y + 1 \} \\
&= \{ (x,y) / y = x + 1 \}, \quad \text{así: } \overline{(1,2)} = \{ (x, x+1) / x \in ¥ \}
\end{aligned}
$$

4. En ¢ definimos la relación de equivalencia R tal que: $aRb \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$
   Determine las clases de equivalencia de los elementos de ¢ .
   Solución:

$$\bar{0} = \{ x \in ¢ \,/\, xR0 \} = \{ x \in ¢ \,/\, x^2 + x = 0 \} = \{ -1, 0 \} = \overline{-1}$$

$$\bar{1} = \{ x \in ¢ \,/\, x^2 + x = 1^2 + 1 \} = \{ x \in ¢ \,/\, x^2 + x - 2 = 0 \} = \{ 1, -2 \} = \overline{-2}$$

$$\bar{2} = \{ x \in ¢ \,/\, x^2 + x = 2^2 + 2 \} = \{ x \in ¢ \,/\, x^2 + x - 6 = 0 \} = \{ 2, -3 \} = \overline{-3}$$

......

$$\bar{n} = \{ n, -(n+1) \} = \overline{-(n+1)}$$

5. Determine las clases de equivalencia por la congruencia módulo 4 en $¢$.
   Solución:

   Sea $m \in ¢^+$, como $a \equiv b (\operatorname{mod} n) \Leftrightarrow \exists\, p \in ¢$ tal que $a - b = pm$ entonces:

   $$\bar{0} = \{ x \in ¢ \,/\, 0 \equiv x (\operatorname{mod} 4) \} = \{ x \in ¢ \,/\, 0 - x = 4p \} = \{ x \in ¢ \,/\, x = 4k, k \in ¢ \} = \{ .., -8, -4, 0, 4, 8, ... \}$$

   $$\bar{1} = \{ x \in ¢ \,/\, 1 \equiv x (\operatorname{mod} 4) \} = \{ x \in ¢ \,/\, 1 - x = 4p \} = \{ x \in ¢ \,/\, x = 4k + 1, k \in ¢ \} = \{ .., -7, -3, 1, 5, 9, ... \}$$

   $$\bar{2} = \{ x \in ¢ \,/\, 2 \equiv x (\operatorname{mod} 4) \} = \{ x \in ¢ \,/\, 2 - x = 4p \} = \{ x \in ¢ \,/\, x = 4k + 2, k \in ¢ \} = \{ .., -6, -2, 2, 6, 10, ... \}$$

   $$\bar{3} = \{ x \in ¢ \,/\, 3 \equiv x (\operatorname{mod} 4) \} = \{ x \in ¢ \,/\, 3 - x = 4p \} = \{ x \in ¢ \,/\, x = 4k + 3, k \in ¢ \} = \{ .., -5, -1, 3, 7, 11, ... \}$$

   Así entonces: $¢_4 = \left\{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \right\}$

6. En $¥$ definimos la relación T por: $aTb \Leftrightarrow \exists\, n \in ¥$ tal que $a^n = b$
   Demuestre que T es una relación de orden
   Solución:

   Para que T sea una relación de orden debe cumplir:
   - i) $aTa \quad \forall a \in ¥$ Refleja
   - ii) $aTb \wedge bTc \Rightarrow aTc$ Transitiva
   - iii) $aTb \wedge bTa \Rightarrow a = b$ Antisimétrica

   i) aTa ya que $a^1 = a$, $1 \in ¥$

   ii) Si $aTb \wedge bTc$ entonces existen $n, m \in ¥$ tal que $a^n = b$ y $b^m = c$; debemos demostrar que existe $p \in ¥$ tal que $a^p = c$.
   Reemplazando $b = a^n$ en $c = b^m$ obtenemos $c = (a^n)^m = a^{nm}$, con $p = mn \in ¥$, luego se cumple.

   iii) Si $aTb \wedge bTa$ entonces existen $n, m \in ¥$ tal que $a^n = b$ y $b^m = a$,
   Reemplazando $b = a^n$ en la segunda igualdad obtenemos: $a^{nm} = a$, de donde: $nm = 1$; así: $n = m = 1$. Esto implica que: $a = b$