UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Prof. Gabriel Rabanales R.

GUÍA 1 DE INDUCCIÓN

1. Usando inducción matemática demuestre que:

$$P(n): \qquad \left(a^n - b^n\right) \textit{ es divisible por } (a-b), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución:
Reescribimos la proposición en la forma:

$$P(n): \qquad \left(a^n - b^n\right) = (a-b)\cdot f(a,b), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(i) **Verificamos** que P(1) es verdadera:

$$\begin{aligned} a^1 - b^1 &= (a-b)\cdot f(a,b) \\ a-b &= (a-b)\cdot 1, \quad \text{con } f(a,b) = 1 \in \mathbb{N} \\ a-b &= a-b \end{aligned}$$

Luego, P(1) es verdadera.

(ii) (a) **Hipótesis de inducción: Suponemos** que la proposición es verdadera para "n = k":

$$P(k): \qquad \left(a^k - b^k\right) = (a-b)\cdot g(a,b)$$

(b) **Tesis de inducción**: **Por demostrar que** P(k+1) es verdadera:

$$P(k+1): \qquad \left(a^{k+1} - b^{k+1}\right) = (a-b)\cdot h(a,b)$$

(c) **Demostración**: En la tesis:

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - b^{k+1} - ab^k + ab^k \\ &= \left(a^{k+1} - ab^k\right) + \left(ab^k - b^{k+1}\right) \\ &= a\left(a^k - b^k\right) + b^k(a-b) \\ &= a\underbrace{(a-b)\cdot g(a,b)}_{\text{por hip.}} + b^k(a-b) \\ &= (a-b)\left[a\cdot g(a,b) + b^k\right] \\ &= (a-b)\cdot h(a,b) \end{aligned}$$

Luego, P(k+1) es verdadera.
Entonces, de (i) y (ii) , P(n) es verdadera para todo "n" natural.