Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. Matemática y Ciencia de la Computación
Prof. Gabriel Rabanales R.

GUIA DE EJERCICIOS
OPERACIONES BINARIAS Y GRUPOS

1) Decida si las siguientes operaciones son o no ley de composición interna en el conjunto declarado
   a) $*: Z \times Z \to Z$ tal que $a * b = ab + 2$
   b) $*$ definida en $Z - \{0\}$ tal que $x * y = \dfrac{x}{y} + 2$
   c) $\mathbf{o}$ definida en Z tal que $a \,\mathbf{o}\, b = (a+b)^2$
   d) $*$ definida en Z tal que $a * b = \dfrac{a+b-2}{3}$
   e) $*$ definida en Q tal que $a * b = \dfrac{a+b-2}{3}$
   f) La multiplicación usual definida en $A = \{1,0,2\}$; $B = \{0,1\}$; $C = \{2,4,6...\}$

2) Sea $*$ ley de composición interna definida en el conjunto E , demuestre:
   a) $(a = b) \Rightarrow a * c = b * c \quad \forall a,b,c \in E$
   b) $(a = b) \Rightarrow c * a = c * b \quad \forall a,b,c \in E$

3) Decida cuales de las siguientes "leyes de composición internas"son asociativas:
   a) $*$ definida en $\Re$ tal que $a * b = a + b + ab$
   b) $*$ definida en $\Re$ tal que $a * b = a + 2b$

4) Decida cuales de las siguientes "leyes de composición internas" tienen neutro e para la operación binaria interna definida
   a) $*$ definida en Q^+ tal que $a * b = \dfrac{ab}{2}$
   b) $*$ definida en $\Re$ tal que $a * b = a + b + 1$
   c) $*$ definida en $\Re$ tal que $x * y = xy + x$

5) Sea $*$ una ley de composición interna en el conjunto E. Demuestre: Si existe elemento neutro para $*$, este elemento es único.

6) Decida cuales de las siguientes "leyes de composición internas" son conmutativas para la operación binaria interna definida
   a) $*$ definida en $\Re$ tal que $a * b = a + b + 3ab$

b) $*$ definida en $\Re$ tal que $a*b=a-b+2ab$

7) Determine la tabla de multiplicar para $*$ definida en el conjunto $E=\{1,2,3,4\}$ tal que $a*b=\text{máx}\{a,b\}$

8) Sea $*$ ley de composición interna definida en el conjunto E tal que la operación es asociativa y tiene neutro e. Demuestre que: si $x\in E$ tiene inverso $\bar{x}$ entonces este es único.

9) En T se define la ley de composición interna * por a * b = a + b – ab
Estudie la asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y elemento inverso.

10) En Z se define la operación binaria interna $*$ tal que $a*b=a+b^2$
Estudie la asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y elemento inverso.

11) En $Q\times Q$ se define $\oplus$ por $(a,b)\oplus(c,d)=(ac,ad+b)$
Estudie la asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y elemento inverso.

12) En el conjunto $S=\{a,b,c\}$ se define $*$ por la siguiente tabla:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

Estudie la asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y elemento inverso.

13) En Z se define las operaciones binaria interna $*$ y $\circ$ por $a*b=a+b+1$ y $a\circ b=a+b+ab$

a) ¿Es el par $(Z,*)$ un grupo?
b) ¿Es el par $(Z,\circ)$ un grupo?
c) ¿Es $*$ distributiva con respecto de $\circ$?
d) ¿ Es $\circ$ distributiva con respecto de $*$?

14) Sea $A=\{a,b\}$ y $(A,*)$ un grupo. Demuestre que el grupo es conmutativo

15) Sea $(G,*)$ un grupo, demuestre:

a) $a*c=b*c\Leftrightarrow a=b\ \ \forall a,b,c\in G$
c) la ecuación $a*x=b$ tiene solución única en G

16) Demuestre que $(C,+)$ es un grupo si $C=\{(x,y)/x,y\in\Re\}$ es el conjunto de los números complejos donde $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

17) Demuestre que $(M(2,\Re),+)$ donde $M(2,\Re)=\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} / a,b,c,d \in \Re\right\}$ es el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño 2 en $\Re$ y: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{pmatrix}$, es un grupo

18) En $\Re^+$ definimos las operaciones binarias internas $*$ y $\circ$ tal que $a*b=b^a$ y $a \circ b = ab$. Demuestre que $*$ distribuye por la izquierda a $\circ$ pero que no hace por la derecha

19) Demuestre que el par $(\Re-\{1\},*)$ es un grupo donde $a*b=a+b+ab$
Resuelva la ecuación 2 $*$ x $*$ 6 = 18