UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

ÁLGEBRA 2001
INGENIERIA CIVIL
CURSO A 02
Prof. Gabriel Rabanales R.

CONTROL 7

1. Determine los valores de "k" para que el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \\ x+ky+3z=2 \end{array}\right|$$

tenga: (a) solución única,
(b) ninguna solución.

2. Demuestre, usando teorema, que:

$$W=\{(x,y,z,w)\in R^4 \,/\, 3y-x=0 \ \wedge \ 4z=0\}\leq R^4$$

3. Demuestre, usando generadores, que:

$$W=\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \,/\, p(-2)=0\}\leq R_2[x]$$

4. Sea: $W=\langle\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}\rangle$

Demuestre que: $(3,4,5)\in W$

Solución:
Problema 1:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \\ x+ky+3z=2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (L_2\to L_2-2L_1) \\ (L_3\to L_3-L_1) \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (L_3\to L_3-(k-1)L_2) \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-(k+2)(k-1) & 1-(k-1) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & (3+k)(2-k) & 2-k \end{array}\right]$$

En consecuencia:
(a) El sistema tiene solución única si la tercera fila es distinta de cero, es decir si:

$$k \neq 2 \quad \wedge \quad k \neq -3$$

(b) El sistema no tiene solución si**: k = -3**, porque en tal caso tenemos: 0 = 5, en la tercera fila.

Nota: Si k = 2, el sistema tiene infinitas soluciones, porque "x" e "y" quedan en función de "z".

Problema 2:

$$\begin{aligned} & W = \{(x, y, z, w) \in R^4 \,/\, 3y - x = 0 \quad \wedge \quad 4z = 0\} \\ \Leftrightarrow \quad & W = \{(x, y, z, w) / \, x = 3y \wedge z = 0\} \\ \Leftrightarrow \quad & W = \{(3y, y, 0, w) / \, y \in R \wedge w \in R\} \end{aligned}$$

(i**) Por demostrar que**: $W \neq \phi$

$$y = 0 \wedge w = 0 \quad \Rightarrow \quad (3 \cdot 0, 0, 0, 0) = (0,0,0,0) \in W \quad \Rightarrow \quad W \neq \phi$$

(ii) **Por demostrar que**: $u \in W \wedge v \in W \quad \Rightarrow \quad u + v \in W$

$$\left.\begin{aligned} u \in W \Rightarrow u = (3u_2, u_2, 0, u_4) \\ v \in W \Rightarrow v = (3v_2, v_2, 0, v_4) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad u + v = (3(u_2 + v_2), (u_2 + v_2), 0, (u_4 + v_4)) \in W$$

(iii)**Por demostrar que**: $\lambda \in R \wedge u \in W \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in W$

$$u \in W \quad \Rightarrow \quad u = (3u_2, u_2, 0, u_4) \quad \Rightarrow \quad \lambda u = (3(\lambda u_2), (\lambda u_2), 0.u_4) \in W$$

Luego, de (i), (ii) y (iii): $W \leq R^4$

Problema 3: $W = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,/\, p(-2) = 0\}$
Entonces:

$$\begin{aligned} p(x) \in W \Leftrightarrow & \; p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \wedge \quad p(-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \; p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \wedge \quad a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \; p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \wedge \quad a_0 = 2a_1 - 4a_2 \\ \Leftrightarrow & \; p(x) = (2a_1 - 4a_2) + a_1 x + a_2 x^2 \quad \wedge \quad (a_1, a_2) \in R^2 \\ \Leftrightarrow & \; p(x) = a_1(2 + x) + a_2(x^2 - 4) \end{aligned}$$

Luego: $W = \langle\{2 + x \,,\, x^2 - 4\}\rangle \quad \leq \quad R_2[x]$

Problema 4:

$$W = \langle \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\} \rangle$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
(3,4,5) \in W \quad &\Leftrightarrow \quad (3,4,5) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \quad \wedge \quad a,b,c \in R \\
&\Leftrightarrow \quad (3,4,5) = (a,0,0) + (b,b,0) + (c,c,c) \\
&\Leftrightarrow \quad (3,4,5) = (a+b+c,\, b+c,\, c) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c = 3 \\ \quad b+c = 4 \\ \qquad c = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ (3,4,5) = (-1)\,(1,0,0) + (-1)\,(1,1,0) + 5\,(1,1,1) \quad \Rightarrow \quad (3,4,5) \in W$$