UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

ÁLGEBRA 2002
INGENIERÍA CIVIL
CURSO C 14
Prof. Gabriel Rabanales R.

# CONTROL 2

1. Usando inducción matemática demuestre la siguiente proposición:

$$P(n): \qquad \sum_{i=1}^{n}(i+1)(i+4)=\frac{1}{3}n(n+4)(n+5) \qquad \forall n\in \mathbb{N}$$

2. En una progresión geométrica los tres primeros términos suman “-6”.
   Si al segundo término se le resta “9”, resulta una progresión aritmética.
   Determine ambas progresiones.

3. Usando el teorema del binomio, y propiedades de las sumatorias, calcule el valor de:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^5+\left(2-\sqrt{3}\right)^5$$

**Solución:**
**Problema 1**

Por demostrar: $P(n): \ \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(i+1)(i+4)}_{a}=\underbrace{\frac{1}{3}n(n+4)(n+5)}_{b} \quad \forall n\in \mathbb{N}$

(i) Verificamos que P(1) sea verdadera:

$$P(1):\begin{cases}\text{En (a): } \sum_{i=1}^{1}(i+1)(i+4)=(1+1)(1+4)=2\cdot 5=10\\[2mm] \text{En (b): } \quad \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(1+4)(1+5)=\frac{1}{3}\cdot 5\cdot 6=\frac{30}{3}=10\end{cases} \Rightarrow\ (a)=(b)\ \Rightarrow\ P(1) \text{ es verdadera}$$

(ii) (a) **Hip. Inducción:** Suponemos que P(k) es verdadera:

$$P(k): \quad \sum_{i=1}^{k}(i+1)(i+4)=\frac{1}{3}k(k+4)(k+5)$$

(b) **Tesis inducción:** Por demostrar que P(k+1) es verdadera:

$$P(k+1): \quad \sum_{i=1}^{k+1}(i+1)(i+4)=\frac{1}{3}(k+1)(k+5)(k+6)$$

(c) **Demostración:** En la tesis:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(i+1)(i+4)=\underbrace{\sum_{i=1}^{k}(i+1)(i+4)}_{hip}+\sum_{i=k+1}^{k+1}(i+1)(i+4)$$

$$=\frac{1}{3}k(k+4)(k+5)+(k+2)(k+5)$$

$$=\frac{1}{3}(k+5)\left[k(k+4)+3(k+2)\right]$$
$$=\frac{1}{3}(k+5)\left[k^2+7k+6\right]$$
$$=\frac{1}{3}(k+5)(k+1)(k+6)$$
$$=\frac{1}{3}(k+1)(k+5)(k+6)$$

Luego P(k+1) es verdadera.
Entonces, de (i) y (ii), P(n) es verdadera para todo número "n" natural.

**Problema 2**

Tenemos: P.G.: $a+ar+ar^2=-6$ (1)

P.A.: $a,\ ar-9,\ ar^2$ (2)

En (1): $a\left(1+r+r^2\right)=-6 \ \Rightarrow\ a=\dfrac{-6}{1+r+r^2}$ (3)

En (2): $(ar-9)-a=ar^2-(ar-9)$

$$ar-9-a=ar^2-ar+9$$
$$ar^2-2ar+a=-18$$
$$a\left(r^2-2r+1\right)=-18 \qquad (4)$$

(3) en (4): $\dfrac{-6}{r^2+r+1}\left(r^2-2r+1\right)=-18$

$$-6\left(r^2-2r+1\right)=-18\left(r^2+r+1\right) \quad /\left(\frac{-1}{6}\right)$$
$$r^2-2r+1=3r^2+3r+3$$
$$2r^2+5r+2=0 \ \Rightarrow\ r=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm 3}{4}=\begin{cases}-2\\ \dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

Entonces tenemos: $r=-2$ (5) (¡tomamos este valor de r!)

$r=\dfrac{-1}{2}$

(5) en (3): $a=\dfrac{-6}{1-2+4}=\dfrac{-6}{3}=-2 \ \Rightarrow\ \boxed{a=-2}$

Por otra parte: $d=(ar-9)-a=4-9+2=-3 \ \Rightarrow\ \boxed{d=-3}$

Así tenemos:

$$PG:\begin{cases}a_1=-2\\ r=-2\end{cases} \Rightarrow\ G=\{-2,4,-8,.....\} \quad \text{y} \quad PA:\begin{cases}a_1=-2\\ d=-3\end{cases} \Rightarrow\ A=\{-2,-5,-8,.....\}$$

**NOTA:** $r=\dfrac{-1}{2}$ es otra solución**. ¡Se exige sólo una de las dos opciones!**

**Problema 3**

$$
\begin{aligned}
\left(2+\sqrt{3}\right)^5+\left(2-\sqrt{3}\right)^5 &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^{5-k}\left(\sqrt{3}\right)^k+\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^{5-k}\left(-\sqrt{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^{5-k}\left[\left(\sqrt{3}\right)^k+\left(-\sqrt{3}\right)^k\right] \\
&= \binom{5}{0}2^5\left[1+1\right]+0+\binom{5}{2}2^3\left[3+3\right]+0+\binom{5}{4}2^1\left[9+9\right]+0 \\
&= 1\cdot 2^5\cdot 2+10\cdot 2^3\cdot 6+5\cdot 2\cdot 18 \\
&= 64+480+180 \\
&= 724
\end{aligned}
$$