UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

ÁLGEBRA 2002
INGENIERÍA CIVIL
CURSO: A 01
Prof. Gabriel Rabanales R.

CONTROL 2

1. Usando inducción matemática demuestre la siguiente proposición:

$$P(n): \qquad n^3+5n \text{ es divisible por } 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. En una progresión geométrica la suma del segundo y tercer términos es 24/3, y la diferencia entre el tercero y primer término es 12/3.
   Determine el primer término y la razón de la PG.

3. Usando el teorema del binomio, y propiedades de las sumatorias, calcule el valor de:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^5-\left(\sqrt{2}-1\right)^5$$

Solución:
Problema 1

Por demostrar: $P(n): \quad \underbrace{n^3+5n}_{a} = \underbrace{3q(n)}_{b} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(i) Verificamos que P(1) sea verdadera:

$$P(1): \begin{cases} En\ (a): \quad 1^3+5\cdot 1 = 6 \\ En\ (b): 3\cdot q(1) = 3\cdot 2 = 6\ ,\ \ q(1)=2\in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow (a)=(b) \quad \Rightarrow P(1) \text{es verdadera}$$

(ii) (a) **Hip. inducción:** Suponemos que P(k) es verdadera:

$$P(k): \quad k^3+5k = 3\cdot q(k)$$

(b) **Tesis inducción:** Por demostrar que P(k+1) es verdadera:

$$P(k+1): \quad (k+1)^3+5(k+1) = 3\cdot q(k+1)$$

(c) **Demostración:** En la tesis:

$$\begin{aligned}(k+1)^3+5(k+1) &= k^3+3k^2+3k+1+5k+5 \\ &= \underbrace{\left(k^3+1\right)}_{hip}+\left(3k^2+3k+6\right) \\ &= 3\cdot q(k)+3\left(k^2+k+2\right) \\ &= 3\Big[\underbrace{q(k)+k^2+k+2}_{q(k+1)}\Big] \\ &= 3\cdot q(k+1)\end{aligned}$$

Luego P(k+1) es verdadera.
Entonces, de (i) y (ii), P(n) es verdadera para todo número “n” natural

Problema 2

Tenemos una progresión geométrica con:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 + a_3 = 8 \\ a_3 - a_1 = 4 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 r + a_1 r^2 = 8 \\ a_1 r^2 - a_1 = 4 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (1)\ \ a_1\left(r + r^2\right) = 8 \\ (2)\ \ a_1\left(r^2 - 1\right) = 4 \end{array}\right|$$

$(1) \Rightarrow\ a_1 = \dfrac{8}{r(r+1)}$, y reemplazando en (2): $\dfrac{8}{r(r+1)} \cdot (r+1)(r-1) = 4$

$$\begin{aligned} 8(r-1) &= 4r \\ 8r - 8 &= 4r \\ 4r &= 8 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Reemplazamos en (1): $\quad a_1 = \dfrac{8}{2\cdot 3} = \dfrac{8}{6} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{4}{3}$

Problema 3

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}+1\right)^5 - \left(\sqrt{2}-1\right)^5 &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}\cdot 1^k - \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}(-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}\left[1-(-1)^k\right] \\ &= 0 + \binom{5}{1}\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot 2 + 0 + \binom{5}{3}\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 2 + 0 + \binom{5}{5}\left(\sqrt{2}\right)^0\cdot 2 \\ &= 5\cdot 4\cdot 2 + 10\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 2 \\ &= 40 + 40 + 2 \\ &= 82 \end{aligned}$$