Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. Matemática y Ciencia de la Computación
Prof. Gabriel Rabanales R.

GUÍA DE EJERCICIOS
TEOREMA DEL BINOMIO (2)

1. En $(3x+2)^{19}$ ¿existirán dos términos consecutivos con coeficientes iguales?

Solución:

Tenemos que: $(3x+2)^{19} = \sum_{k=1}^{19}\binom{19}{k}(3x)^{19-k}2^k = \sum_{k=1}^{19}\binom{19}{k}3^{19-k}2^k x^{19-k}$

Y queremos encontrar k tal que: $\binom{19}{k}3^{19-k}2^k = \binom{19}{k+1}3^{19-(k+1)}2^{k+1}$.

$$\binom{19}{k}3^{19-k}2^k = \binom{19}{k+1}3^{19-(k+1)}2^{k+1} \Rightarrow \frac{19!}{k!(19-k)!}3^{19-k}2^k = \frac{19!}{(k+1)!(18-k)!}3^{18-k}2^{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{19-k} = \frac{2}{k+1} \Rightarrow k = 7$$

En consecuencia el octavo término y el noveno término cumplen la condición, y los coeficientes son:

$$3^{12}2^7\binom{19}{7} = 3^{11}2^8\binom{19}{8}$$

2. Verifique que: $k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$

Solución:

$$k\binom{r}{k} = \frac{kr(r-1)(r-2).........((r-(k-1))}{k!}$$

$$= r\,\frac{(r-1)(r-2)........((r-1)-(k-2))}{(k-1)!} \quad = r\binom{r-1}{k-1}$$

3. Calcule: $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

Solución:

Como $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, entonces $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$$

$$= n \cdot 2^{n-1}$$

Esto último porque: $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$

4. Determine el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(1+x+x^2)^{10}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Solución:

Escribimos: $(1+x+x^2)^{10} = \left[(1+x)+x^2\right]^{10}$, y aplicando el Teorema del Binomio obtenemos:

$$(1+x+x^2)^{10} = \left[(1+x)+x^2\right]^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(1+x)^{10-k}(x^2)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left[\sum_{p=0}^{10-k}\binom{10-k}{p} 1^{10-k-p} x^p\right]x^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{10}\sum_{p=0}^{10-k}\binom{10}{k}\binom{10-k}{p} x^{p+2k}$$

Como queremos el coeficiente de x^6, entonces se debe cumplir que $p+2k=6$, $p,k \in \mathbb{N}_0$

Tenemos las siguientes combinaciones posibles:

$$(k=0\,,\ p=6)\,,(k=1,\ p=4)\,,(k=2\,,\ p=2)\,,(k=3\,,\ p=0)$$

Así el coeficiente de x^6 es:

$$\binom{10}{0}\binom{10}{6}+\binom{10}{1}\binom{9}{4}+\binom{10}{2}\binom{8}{2}+\binom{10}{3}\binom{7}{0}$$