UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

ÁLGEBRA 2001
INGENIERÍA CIVIL
CURSO A 02
Prof. Gabriel Rabanales R.

CONTROL 6

1. Descomponga en fracciones parciales:

$$\frac{x^2-1}{\left(x^{-2}+1\right)^2}$$

2. Calcule los valores de t ∈ C, tales que:

$$t=\sqrt[3]{z^9}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right), \quad \text{con}: \ z=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

3. a) Resuelva la ecuación: $3x^2-x+1\cong 4 \ \text{mod}(5)$

   b) Demuestre que: $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(bx+cy), \quad x,y\in Z$

4. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-z=1 \\ 3x+4y+z=2 \\ 5x+4y+6z=-15 \end{cases}$$

   expréselo en la forma matricial**: AX = B**, y luego:

   a) Determine el rango de "A".
   b) Resuelva el sistema usando el método de matriz ampliada.

SOLUCIÓN:

Problema 1

(i) Reordenamos la expresión para darle la forma p(x)/q(x). Así obtenemos:

$$\frac{x^2-1}{\left(x^{-2}+1\right)^2}=\frac{x^6-x^4}{x^4+2x^2+1} \quad \text{y} \quad \partial\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)=2 \ \Rightarrow \ \textit{fracción impropia}$$

(ii) Haciendo la división tenemos: $\dfrac{x^6-x^4}{x^4+2x^2+1}=x^2-3+\dfrac{5x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2}$

(iii) Aplicamos fracciones parciales: $\dfrac{5x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)}+\dfrac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}$

(iv) Desarrollando tenemos:

$$\frac{5x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{(Ax+B)\left(x^2+1\right)+Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

(v) A fracciones iguales, con denominadores iguales, corresponden numeradores iguales:

$$5x^2+3=Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$$

(vi) A polinomios iguales corresponden coeficientes homólogos iguales, es decir:

$$\begin{cases} A=0 \\ B=5 \\ A+C=0 \;\Rightarrow\; C=0 \\ B+D=3 \;\Rightarrow\; D=-2 \end{cases}$$

(vii) Finalmente reemplazamos y tenemos:

$$\frac{x^2-1}{\left(x^{-2}+1\right)^2}=\frac{x^6-x^4}{x^4+2x^2+1}=x^2-3+\frac{5}{\left(x^2+1\right)}-\frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

que es la descomposición pedida.

Problema 2

(i) Expresamos “z” en la forma polar:

$$\left.\begin{matrix} x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\}\Rightarrow\; z\in \mathit{II\ cuadrante} \quad y \quad \operatorname{tg}\theta=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \theta=\frac{5\pi}{6} \quad \wedge \quad |z|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

con lo cual: $z=\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}$

(ii) Ahora aplicamos De Moivre y tenemos:

$$z^9=\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)^9=\left(\cos\frac{45\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{45\pi}{6}\right)=\left(\cos\frac{36\pi+9\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{36\pi+9\pi}{6}\right)$$
$$=\left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}+3\cdot 2\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{6}+3\cdot 2\pi\right)\right)=\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

(iii) Aplicamos De Moivre para calcular la raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{z^9} = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right),\quad k = 0,1,2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_0 = \left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{6}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i \\ z_1 = \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ z_2 = \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{6} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$$

(iv) Ahora calculamos los valores de “t”:

$$t_1 = z_0 + z = i + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$t_2 = z_1 + z = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3}$$

$$t_3 = z_2 + z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 0$$

Problema 3(a)

(i) Consideremos los enteros módulo 5: $Z_5 = \left\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\right\}$

(ii) $3x^2 - x + 1 \cong 4 \text{ mod}(5) \;\Rightarrow\; \exists \text{k} \in \text{Z}:\; 3\text{x}^2 - x - 3 = 5k \;\Rightarrow\; 5 \big| \left(3\text{x}^2 - x - 3\right)$

(iii) Entonces la ecuación anterior tendrá solución si existe algún valor entero de “x” tal que la expresión “$3\text{x}^2 - x - 3$” sea divisible por “5”. Al respecto:

$$\begin{cases} \text{Para x} = 0:\; 0 - 0 - 3 = -3, \;\text{ no es divisible por 5} \\ \text{Para x} = 1:\; 3 - 1 - 3 = -1, \;\text{ no es divisible por 5} \\ \text{Para x} = 2:\; 12 - 2 - 3 = 7, \;\text{ no es divisible por 5} \\ \text{Para x} = 3: 27 - 3 - 3 = 21, \;\text{ no es divisible por 5} \\ \text{Para x} = 4: 48 - 4 - 3 = 41, \;\text{ no es divisible por 5} \end{cases}$$

En consecuencia, la ecuación no tiene solución en módulo “5”.

Problema 3(b)

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow \exists p\in Z : b = ap \\ a|c \Rightarrow \exists q\in Z : c = aq \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} bx = apx,\ \ x\in Z \\ cy = aqy,\ \ y\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow bx + cy = apx + aqy = a(px+qy) = am,\ \ m\in Z$$

$$\Rightarrow a|(bx+cy), \quad x, y\in Z$$

Problema 4

(i) Expresamos el sistema en la forma matricial: **AX = B**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -15 \end{bmatrix}$$

(ii) Consideramos la matriz ampliada $(A|B)$, y aplicamos operaciones elementales fila:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & -15 \end{array}\right] \underset{\sim}{(L_2 \to L_2 - L_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & -15 \end{array}\right] \underset{\sim}{(L_1 \leftrightarrow L_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & -15 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c}(L_2 \to L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \to L_3 - 5L_1)\end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -5 & -1 \\ 0 & -16 & -4 & -20 \end{array}\right] \underset{\sim}{\left(L_3 \to -\frac{1}{4}L_3\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c}(L_1 \to L_1 - L_3) \\ (L_2 \to L_2 + 2L_3)\end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\left(L_2 \to -\frac{1}{3}L_2\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c}(L_1 \to L_1 - L_2) \\ (L_3 \to L_3 - L_2)\end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{array}\right] \underset{\sim}{\left(L_3 \to \frac{1}{4}L_3\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{(L_2 \leftrightarrow L_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \rho(A) = \rho(A|B) = 3 \ \Rightarrow$ El sistema tiene solución (por el teorema del rango)

(iii) Así entonces, el rango de la matriz "A" es "3", y la solución del sistema es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$