UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN.

ÁLGEBRA 2001
INGENIERÍA CIVIL
CURSO A 02
Prof. Gabriel Rabanales R.

CONTROL 3

1. Dada la función:

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \to & f(x,y) = (3-2x\ ,\ x+y-1) \end{array}$$

(a) Demuestre que es inyectiva.
(b) Demuestre que es epiyectiva.
(c) Encuentre f^{-1}

2. Considere las funciones biyectivas:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \text{dada por:} \quad f(x,y) = (x-y\ ,\ 3x+y)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \text{dada por:} \quad g(u,v) = (-u\ ,\ v)$$

Determine la función: $g \circ f^{-1}$

3. Demuestre que: $tg 15^{\circ} = 2-\sqrt{3}$

4. Demuestre la identidad:

$$sen^4 a + 2\, sen^2 a \left(1 - \frac{1}{\cos ec^2 a}\right) = 1 - \cos^4 a$$

Solución:
Problema 1

(a) f es inyectiva ssi:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in domf \wedge f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$$

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) &\Rightarrow (3-2x_1, x_1+y_1-1) = (3-2x_2, x_2+y_2-1) \\ &\Rightarrow 3-2x_1 = 3-2x_2 \quad \wedge \quad x_1+y_1-1 = x_2+y_2-1 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \\ &\Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \end{aligned}$$

Luego f es inyectiva.

(b) Por demostrar que: $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = (u,v)$

$$\begin{aligned} f(x,y) = (u,v) &\Rightarrow (3-2x, x+y-1) = (u,v) \\ &\Rightarrow 3-2x = u \quad \wedge \quad x+y-1 = v \\ &\Rightarrow x = \frac{3-u}{2} \quad \wedge \quad x+y-1 = v \\ &\Rightarrow x = \frac{3-u}{2} \quad \wedge \quad y = \frac{u+2v-1}{2} \end{aligned}$$

Entonces: $f(x,y) = f\left(\frac{3-u}{2}, \frac{u+2v-1}{2}\right) = \left(3-2\frac{3-u}{2}, \frac{3-u}{2} + \frac{u+2v-1}{2} - 1\right) = (u,v))$

Luego f es epiyectiva.

(c) La función inversa está definida por:

$$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to f^{-1}(x,y) = \left(\frac{3-x}{2}, \frac{x+2y-1}{2}\right)$$

Problema 2

Si f es biyectiva entonces existe la inversa f^{-1}

AsÍ: $f(x,y)=(u,v) \Rightarrow (x-y, 3x+y)=(u,v)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=u \\ 3x+y=v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{4} \\ y=\dfrac{v-3u}{4} \end{cases}$$

de donde: $f(x,y)=f\left(\dfrac{u+v}{4}, \dfrac{v-3u}{4}\right) \overset{reeemplazando}{=} (u,v)$

Entonces: $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f^{-1}(x,y)=\left(\dfrac{x+y}{4}, \dfrac{y-3x}{4}\right)$

Por lo tanto: $g \circ f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $\left(g \circ f^{-1}\right)(x,y)=g\left(\dfrac{x+y}{4}, \dfrac{y-3x}{4}\right)=\left(-\dfrac{x+y}{4}, \dfrac{y-3x}{4}\right)$

Problema 3

$$\tan 15^{\circ} = \tan\left(\frac{30^{\circ}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30^{\circ}}{1+\cos 30^{\circ}}}$$
$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$
$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}}$$
$$= \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{1}} = 2-\sqrt{3}$$

Problema 4

$$\text{Primer miembro} = \sin^4 a + 2\sin^2 a \left(1-\sin^2 a\right)$$
$$= \sin^4 a + 2\sin^2 a \cdot \cos^2 a = \sin^2 a\left(\sin^2 a + 2\cos^2 a\right)$$
$$= \left(1-\cos^2 a\right)\left(1-\cos^2 a + 2\cos^2 a\right) = \left(1-\cos^2 a\right)\left(1+\cos^2 a\right)$$
$$= 1-\sin^4 a = \text{Segundo miembro}$$