UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

ÁLGEBRA 2001
INGENIERÍA CIVIL
CURSO A 02
Prof. Gabriel Rabanales R.

CONTROL 1

1. Simplifique mediante álgebra de proposiciones:

$$\{[(p \wedge q) \wedge \sim (r \vee s)] \Rightarrow [q \Rightarrow (\sim r \wedge \sim s)]\} \vee (p \vee q)$$

2. Calcule la siguiente sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{100} \left[\frac{(k+1)!}{(k-1)!} - k(k-1) \right]$$

3. Usando inducción matemática demuestre que:

$$P(n): \qquad 3^{2n} - 1 \quad es\ divisible\ por\ 8 \qquad , \forall n \in N$$

Solución:

Problema 1

$$\{[(p \wedge q1) \wedge \sim (r \vee s)] \Rightarrow [q \Rightarrow (\sim r \wedge \sim s)]\} \vee (p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\sim [(p \wedge q) \wedge \sim (r \vee s)] \vee [\sim q \vee (\sim r \wedge \sim s)]\} \vee (p \vee q) \qquad [(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\sim a \vee b)]$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\sim [(p \wedge q) \wedge \sim (r \vee s)] \vee [\sim q \vee \sim (r \vee s)]\} \vee (p \vee q) \qquad [De\ Morgan]$$

$$\Leftrightarrow \quad [\sim (p \wedge q) \vee (r \vee s)] \vee [\sim q \vee \sim (r \vee s)] \vee (p \vee q) \qquad [De\ Morgan]$$

$$\Leftrightarrow \quad [\sim (p \wedge q) \vee \sim q] \vee [(r \vee s) \vee \sim (r \vee s)] \vee (p \vee q) \qquad [Conm.\ y\ Asoc. \vee]$$

$$\Leftrightarrow \quad [\sim (p \wedge q) \vee \sim q] \vee T \vee (p \vee q) \qquad [(a \vee \sim a) \Leftrightarrow T]$$

$$\Leftrightarrow \quad T \qquad [(a \vee T) \Leftrightarrow T]$$

Problema 2

$$\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{(k+1)!}{(k-1)!}-k(k-1)\right]=\sum_{k=1}^{100}\left[k(k+1)-k(k-1)\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{100}\left[k(k+1-k+1)\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{100}2k$$
$$=2\sum_{k=1}^{100}k$$
$$=2\,\frac{100*101}{2}=10100$$

Problema 3

$$P(n):\quad 3^{2n}-1=8\cdot q(n)\quad ,\ \forall n\in \boldsymbol{N}$$

(i) Verificamos para n = 1:

P(1): $\begin{cases} 3^2-1=8\,q(1) \\ 8=8\cdot q(1) \\ 8=8\cdot 1 \\ 8=8 \end{cases}$, existe q(1) = 1 en **N**

Luego, P(1) es verdadera.

(ii) (a**) Hipótesis de inducción**: **Suponemos** que la proposición es verdadera para n = k:

$$P(k):\quad 3^{2k}-1=8\cdot q(k)$$

(b) **Tesis de inducción**: **Por demostrar que** la proposición es verdadera para n = k+1:

$$P(k+1):\quad 3^{2k+2}-1=8\cdot q(k+1)$$

(c) **Demostración**:

En la hipótesis: $\begin{cases} 3^{2k}-1=8\,q(k)\quad /\cdot 3^2 \\ 3^{2k+2}-9=8\cdot q(k)\cdot 9 \\ 3^{2k+2}-1-8=8\cdot q(k)\cdot 9 \\ 3^{2k+2}-1=8\cdot q(k)\cdot 9+8 \\ 3^{2k+2}-1=8[\underbrace{9\cdot q(k)+1}_{\in \boldsymbol{N}}] \\ 3^{2k+2}-1=8\cdot q(k+1)\qquad \Rightarrow P(k+1) \text{ es verdadera} \end{cases}$

Entonces, de (i) y (ii) : P(n) es verdadera para todo “n” natural.