U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

PES CÁLCULO AVANZADO

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2005

PREGUNTA 1. El movimiento de una partícula en IR^3 se realiza por el borde del circulo unitario del plano xy según la trayectoria dada por $\vec{r}(t) = \left(\cos(\pi t^2)\right., \sin(\pi t^2), 0)$

a. Calcule y grafique la velocidad de la partícula en $t = \sqrt{2}$ seg.

b. Que porción de la circunferencia recorre la partícula transcurridos $\frac{1}{2}$seg

c. En que punto se debe liberar esta partícula para que en su trayectoria tangencial a la circunferencia pase por el punto $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$. Use argumentos analíticos del tema Curvas.

DESARROLLO

a. $\vec{r}(t) = \left(\cos(\pi t^2)\right., \sin(\pi t^2), 0)$

$\vec{r}\prime(t) = \left(-2\pi t\sin(\pi t^2), 2\pi t\cos(\pi t^2), 0\right)$

$\vec{r}(\sqrt{2}) = (\cos(2\pi), \sin(2\pi), 0) = (1, 0, 0)$ Posición de partícula.

$\vec{r}\prime(\sqrt{2}) = \left(-2\sqrt{2}\pi\sin(2\pi), 2\sqrt{2}\pi\cos(2\pi), 0\right) = (0, 2\sqrt{2}\pi, 0)$

$v = \vec{r}\prime(\sqrt{2}) = (0, 2\sqrt{2}\pi, 0)$

b. $S_o = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \|\vec{r}\prime(t)\|\, dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 4\pi t\ dt = \left[4\pi\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$

Respuesta: La partícula recorre en $\frac{1}{2}$ seg la *cuarta parte* de la circunferencia.

c. $\vec{r}(t_o) = \left(\cos(\pi t_o^2)\right., \sin(\pi t_o^2), 0)$ punto de tangencia.

$\vec{r}\prime(t_o) = \left(-2\pi t_o\sin(\pi t_o^2), 2\pi t_o\cos(\pi t_o^2), 0\right)$ vector tangente en punto de tangencia $(x_o(t_o), y_o(t_o), z_o(t_o))$

Ecuación de la Recta Tangente:

$$T : (x, y, z) = \left(\cos(\pi t_o^2)\right. - 2\pi t_o\sin(\pi t_o^2)t, \sin(\pi t_o^2) + 2\pi t_o\cos(\pi t_o^2)t, 0)$$

ya que debe pasar por $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ se tiene:

(1) $\cos(\pi t_o^2) - 2\pi t_o\sin(\pi t_o^2)t = \frac{2}{\sqrt{2}}$

(2) $\sin(\pi t_o^2) + 2\pi t_o\cos(\pi t_o^2)t = 0$

$\Rightarrow t = -\dfrac{\sin(\pi t_o^2)}{2\pi t_o \cos(\pi t_o^2) t}$

reemplazando en (1)

$\cos(\pi t_o^2) - 2\pi t_o \sin(\pi t_o^2)\left(-\dfrac{\sin(\pi t_o^2)}{2\pi t_o \cos(\pi t_o^2)}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos(\pi t_o^2) + \dfrac{\sin^2(\pi t_o^2)}{\cos(\pi t_o^2)} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\cos(\pi t_o^2)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos(\pi t_o^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \pi t_o^2 = \dfrac{7\pi}{4} \Rightarrow t_o = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow \vec{r}(t_o) = \big(\cos(\tfrac{7}{4}\pi), \sin(\tfrac{7}{4}\pi), 0\big)$

$\therefore Punto = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, o\right)$

PREGUNTA 2. Considere la función definida en IR^2 por $f(x, y) = xy^3 - x^3y$.

a. Determine y clasifique los puntos críticos de f.

b. Calcule el máximo y el mínimo de $f(x, y)$ en el circulo $x^2 + y^2 \leq 1$

DESARROLLO

a. $\nabla f = \big(y^3 - 3x^2y, 3xy^2 - x^3\big) = (0, 0)$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} y(y^2 - 3x^2) = 0 \\ x(3y^2 - x^2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ punto crítico}$$

Otra posibilidad:

$$\left.\begin{array}{l} (y^2 - 3x^2) = 0 \\ (3y^2 - x^2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2 = \frac{x^2}{3} \Rightarrow x = 0, y = 0$$

$\therefore (0, 0)$ único punto crítico.

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} -6xy & 3y^2 - 3x^2 \\ 3y^2 - 3x^2 & 6xy \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto el teorema de la segunda derivada no aporta información.

Como $f(0,0) = 0$ y $f(x, \frac{x}{2}) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{2} = \frac{x^4 - 4x^4}{8} = -3\frac{x^4}{8} < 0$

$f(x, 2x) = 8x^4 - 2x^4 = 6x^4 > 0$

Luego $(0, 0, f(0, 0))$ es un punto silla.

b. Ya sabemos que en el interior del círculo el único punto crítico que hay es $(0, 0)$.

Usamos el método de los Multiplicadores de Lagrange para estudiar el comportamiento de la función en la frontera.

$F(x, y, \lambda) = xy^3 - x^3y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

(1) $\frac{\partial F}{\partial x} = y^3 - 3x^2y - 2\lambda x = 0$

(2) $\frac{\partial F}{\partial y} = 3xy^2 - x^3 - 2\lambda y = 0$

(3) $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0$

(4) de $(1)y - (2)x : y^4 - 6x^2y^2 + x^4 = 0$

De (3) obtenemos $y^2 = 1 - x^2$

Reemplazando en (4)

$$\left(1 - x^2\right)^2 - 6x^2\left(1 - x^2\right) + x^4 = 0$$

$$\Rightarrow 8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$y^2 = 1 - \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4} = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4}$$

$$f(x, y) = xy(y^2 - x^2)$$

$$y^2 - x^2 = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4} - \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2y^2 = \left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{2 \mp \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{4 - 2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow xy = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Luego:

Máximo de $f = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$

Mínimo de $f = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$

PREGUNTA 3. Calcule el área de la superficie de la porción del elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, cortada por el cono $x^2 + z^2 = y^2$.

DESARROLLO

$$S : y = \sqrt{\frac{1 - z^2 - x^2}{2}} \qquad \text{para} \qquad y \geq 0$$

$$y_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1 - z^2 - x^2}} \qquad , y_z = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{z}{\sqrt{1 - z^2 - x^2}}$$

$$Área = \iint\limits_S ds = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{2(1 - z^2 - x^2)} + \frac{z^2}{2(1 - z^2 - x^2)}} dx\ dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_D \sqrt{\frac{2 - x^2 - z^2}{(1 - z^2 - x^2)}} dx\ dz$$

Usamos coordenadas polares:

$$z = r\cos\theta \qquad 0 \leq r \leq \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x = r\sin\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{Área} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_o^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \int\limits_o^{2\pi} r\sqrt{\frac{2 - r^2}{1 - r^2}} dr\ d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_o^{\frac{1}{\sqrt{3}}} r\sqrt{\frac{2 - r^2}{1 - r^2}} dr$$

Haciendo $u = 1 - r^2 \Rightarrow du = -2r\ dr$; $u = z^2 \Rightarrow du = 2z\ dz$

$$\text{Área} = -\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_1^{\frac{2}{3}} \frac{(1 + u)^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} du = -\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_1^{\sqrt{\frac{2}{3}}} (1 + z)^2 dz$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{z}{2}\sqrt{1 + z^2} + \frac{1}{2}\ln(z + \sqrt{1 + z^2})\right]_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^1$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) - \tfrac{\sqrt{10}}{3} - \ln\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} + \sqrt{\tfrac{5}{3}}\right)\right]$$

$$\text{Área total } = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) - \tfrac{\sqrt{10}}{3} - \ln\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} + \sqrt{\tfrac{5}{3}}\right)\right]$$

PREGUNTA 4. Evalue $\int\limits_C (2xy + z^3)dx + x^2dy + 3xz^2dz$ si C es la curva determinada por:

a. La intersección de $x^2 + z^2 = 1$ y $y = x$ desde $(0, 0, 1)$ a $(1, 1, 0)$

b. La intersección de $x = y^2 + z^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

DESARROLLO

Por independencia de trayectorias:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = 0\hat{\imath} - (3z^2 - 3z^2)\hat{\jmath} + (2x - 2x)\hat{k} = 0$$

F es un campo gradiente $F = \nabla\phi$ donde $\phi(x, y, z) = x^2y + xz^3$

a. $\int\limits_C (2xy+z^3)dx + x^2dy + 3xz^2dz = \phi(0,0,1) - \phi(1,1,0) = 1$

b. En este caso C es una curva cerrada, por lo tanto:

$$\int\limits_C (2xy+z^3)dx + x^2dy + 3xz^2dz = 0$$