U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

TERCERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2005

PREGUNTA 1. Considere la integral $I = \int_0^{2a} \int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{6a^2 - x^2}} 2xy \; dy \; dx$

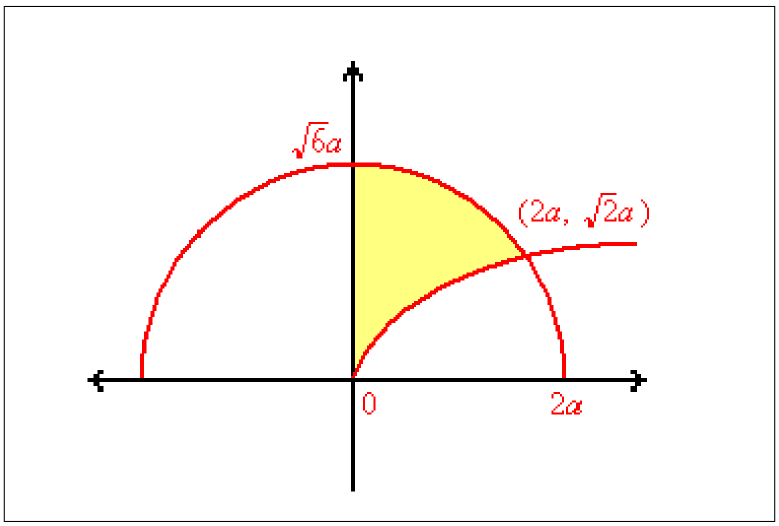
a. Haga el gráfico del dominio de I.

b. Cambiar el orden de integración de I.

c. Evaluar I.

DESARROLLO

a. $D = \left\{ (x, y) \in IR \; / \; 0 \le x \le 2a; \sqrt{ax} \le y \le \sqrt{6a^2 - x^2} \right\}$



b. $D = D_1 \cup D_2$

$D_1 = \left\{ (x, y) \in IR \; / \; 0 \le x \le \frac{y^2}{a}; 0 \le y \le \sqrt{2}a \right\}$

$D_2 = \left\{ (x, y) \in IR \; / \; 0 \le x \le \sqrt{6a^2 - y^2}; \sqrt{2}a \le y \le \sqrt{6}a \right\}$

Luego

c. $I = \int_o^{\sqrt{2}a} \int_o^{\frac{y^2}{a}} 2xy \; dx \; dy + \int_{\sqrt{2}a}^{\sqrt{6}a} \int_o^{\sqrt{6a^2 - y^2}} 2xy \; dx \; dy$

$$I = \int_0^{2a} \int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{6a^2 - x^2}} 2xy \; dy \; dx = \int_0^{2a} x \left(\left[y^2 \right]_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{6a^2 - x^2}} \right) dx$$

$$I = \int_0^{2a} x \left[6a^2 - x^2 - ax \right] dx$$

$I = 12a^4 - 4a^4 - \frac{8}{3}a^4 = \frac{16}{3}a^4$

PREGUNTA 2. Calcule el volumen de la región tridimensional acotada por arriba por la parte superior del hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + a^2 = 0$, $z \geq 0$ y el cono $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ para $z \geq 0$

DESARROLLO

Para la intersección:

$x^2 + y^2 - (2x^2 + 2y^2) + a^2 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2, \qquad z = \sqrt{2}a \qquad$ intersección de las superficies

$$V = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2+x^2+y^2}} dz\ dy\ dx$$

En coordenadas Cilíndricas:

$x = r\cos\theta \qquad 0 \leq r \leq a$
$y = r\sin\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
$z = z \qquad \sqrt{2}r \leq z \leq \sqrt{a^2 + r^2}$

$$V = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}r}^{\sqrt{a^2+r^2}} r dz\ d\theta\ dr$$

$$V = \int_0^a \int_0^{2\pi} r\left(\sqrt{a^2+r^2} - \sqrt{2}r\right)\ d\theta\ dr = \int_0^a 2\pi\left(r\sqrt{a^2+r^2} - \sqrt{2}r^2\right) dr$$

$$V = \left[\frac{2\pi}{3}(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}a^3 - a^3\right) - \frac{\sqrt{2}a^2 2\pi}{3}$$

$$V = \frac{2\pi}{3}\left(a^3\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$$

PREGUNTA 3. Verificar el teorema de Stokes para $F(x,y,z) = -y^3\hat{\imath} + x^3\hat{\jmath} + z^3\hat{k}$ donde S es la porción del plano $x + y + z = 1$ al interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.Sabiendo que: $\int_C F \cdot ds = \frac{3\pi}{2}$.

DESARROLLO

Fórmula de Stokes

$$\int_C F \cdot ds = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{N}\ dS$$

$$(\nabla \times F) = \left(0, 0, 3x^2 + 3y^2\right)$$

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{N}\ dS = \iint_D 3\left(x^2 + y^2\right) dx\ dy$$

$D : x^2 + y^2 \leq 1$

Usando coordenadas polares:

$x = r\cos\theta \qquad 0 \le r \le 1$
$y = r\sin\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\iint_D 3\left(x^2+y^2\right) dx\ dy = 3\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2 r\ d\theta\ dr = 6\pi\int_0^1 r^3 dr = \tfrac{3\pi}{2}$$

REGUNTA 4. Sea S la superficie cerrada formada por el casquete superior de $x^2+y^2+z^2=1$, $z \ge 0$ y su base es $x^2+y^2 \le 1$, $z=0$. Sea $E = E(x,y,z)$ un campo eléctrico definido por $E(x,y,z) = 2x\hat{\imath}+2y\hat{\jmath}+2z\hat{k}$. Se pide:

a. Escribir S como una superficie parametrizada.

b. Hallar el flujo eléctrico a través de S hacia el exterior usando (**a.**) para evaluar $\iint_s F\cdot\hat{N}\ ds$

DESARROLLO

Sean
$S_1 : x^2+y^2+z^2 = 1 \quad , \quad z \ge 0$
$S_2 : x^2+y^2 \le 1 \quad , \quad z = 0$

En base a esto $S = S_1 \cup S_2$

Superficie parametrizada S_1 :

$\Phi(\phi,\theta) = (\cos\theta\ \sin\phi, \sin\theta\ \sin\phi, \cos\theta)$
Con $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

Superficie parametrizada S_2 :

$\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0)$
con $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$

b. Flujo eléctrico $= \iint_S F\cdot\hat{N}\ ds = \iint_{S_1} F\cdot\hat{N}_1\ ds + \iint_{S_2} F\cdot\hat{N}_2 ds$

$$\iint_{S_1} F\cdot\hat{N}_1\ dS = \iint_{D_1} F\cdot(T_\phi\times T_\theta)\ d\phi\ d\theta$$

$T_\phi = (\cos\theta\ \cos\phi, \sin\theta\ \cos\phi, -\sin\phi)$

$T_\theta = (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0)$

$T_\phi\times T_\theta = \left(\cos\theta\sin^2\phi, \sin\theta\sin^2\phi, \sin\phi\cos\phi\right)$

$E(\Phi(\phi,\theta)) = (2\cos\theta\sin\phi, 2\sin\theta\sin\phi, 2\cos\phi)$

$$\begin{aligned} E\cdot(T_\phi\times T_\theta) &= 2\cos^2\theta\sin^3\phi + 2\sin^2\theta\sin^3\phi + 2\sin\phi\cos^2\phi \\ &= 2\sin^3\phi + 2\sin\phi\cos^2\phi = 2\sin\phi \end{aligned}$$

$$\iint_{D_1} F \cdot (T_\phi \times T_\theta)\ d\phi\ d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin\phi\ d\phi\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 \left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} 2\,(0+1)\, d\theta$$

$$\iint_{D_1} F \cdot (T_\phi \times T_\theta)\ d\phi\ d\theta = \left[2\theta\right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

$$\iint_{S_2} F \cdot \hat{N}_2 dS = \iint_{D_2} F \cdot (T_\theta \times T_\rho)\ d\theta\ d\rho$$

$T_\theta = (-\rho \sin\theta, \rho\cos\theta, 0)$

$T_\rho = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\Rightarrow T_\theta \times T_\rho = -\rho\hat{k}$

$$\iint_{D_2} F \cdot (T_\theta \times T_\rho)\ d\theta\ d\rho = \iint_{D_2} (2\rho\cos\theta, 2\rho\sin\theta, 0) \cdot (0, 0, -\rho)\ d\rho\ d\theta$$

$$= \iint_{D_2} 0\ d\theta\ d\rho = 0$$

Finalmente se tiene que:

$$\iint_S F \cdot \hat{N}\ dS = 4\pi$$