U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

SEGUNDA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2005

PREGUNTA 1. Probar que la ecuación $x^2 - y^2 + z \quad e^z = 0$ define implícitamente la función $z = f(x, y)$ en una vecindad de V de $(1, 1)$. Establacido lo anterior conteste.

a. A partir de la ecuación dada calcular $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ con $(x, y) \in \; V(1, 1)$ y tambien $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$

b. Determine en que dirección $\hat{u}$ la derivada direccional de f en (1,1) es igual a cero.

c. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(1, 1, f(1, 1))$ y verificar que este plano tangente pasa por el origen.

DESARROLLO

Se define $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z \; e^z = 0$

$(1, 1) = (x_o, y_o) \Rightarrow z_o = 0 \qquad y \qquad F(1, 1, 0) = 0$

$F_x = 2x, \qquad F_y = -2y, \qquad F_z = e^z + ze^z = e^z(1 + z)$

Claramente estas tres derivadas parciales son contínuas en IR^3 por lo que F pertenece a la clase C^1 en IR^3.

$$\frac{\partial F}{\partial z} = e^z(1 + z) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 0) = 1 \neq 0$$

Por teorema de la función implicita en $V = V_\delta(1, 1)$ alguna vecindad de $(1, 1)$ y $(-r, r)$ vecindad de $z_0 = 0$, existe una unica función $z = f(x, y)$ definida en V tal que $f(x, y) \in (-r, r)$pasa por todo $(x, y) \in V$.

____0.6

a. $f_x(x, y) = -\dfrac{2x}{e^z(1 + z)} \qquad , \qquad f_y(x, y) = \dfrac{2y}{e^z(1 + z)} \qquad , \qquad (x, y) \in V.$

$f_x(1, 1) = -2 \qquad , \qquad f_y(1, 1) = 2$

____0.6

b. Sea $\hat{u} = (e_1, e_2) \qquad , \qquad D_{\hat{u}}f(1, 1) = (-2, 2) \cdot (e_1, e_2) = -2e_1 + 2e_2 = 0$

$\Rightarrow e_1 = e_2$ o sea $\hat{u} = (e_1, e_1)$

$\|\hat{u}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{2e_1^2} = 1 \Rightarrow \hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad o \qquad \hat{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

____0.4

c. $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 0) \qquad y \qquad \bigtriangledown(1, 1, 0) = (2, -2, 1)$

$2(x - 1) - 2(y - 1) + (z - 0) = 0$

$\Rightarrow 2x - 2y + z = 0$ Ecuación del plano tangente.

$(0, 0, 0)$ verifica la ecuación, es decir, está en el plano.

____0.4

PREGUNTA 2. Suponga que f es una función diferenciable de una variable y que una función $u = g(x, y)$ se define por:

$$u = g(x, y) = x \; y \; f\left(\frac{x + y}{xy}\right)$$

a. Verifique que u satisface la ecuación diferencial
$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = u \cdot G(x, y)$

b. Determine $G(x, y)$

DESARROLLO

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot f\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) + x\ yf\,'\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) \cdot \tfrac{1}{y} \cdot \tfrac{x-(x+y)}{x^2} = y \cdot f\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) - \tfrac{y}{x} f\,'\left(\tfrac{x+y}{xy}\right)$$

_______________________________________0.4

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 y \cdot f\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) - xyf\,'\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) \qquad (1)$$

_______________________________________0.2

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot f\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) + x\ yf\,'\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) \cdot \tfrac{1}{x} \cdot \tfrac{y-(x+y)}{y^2} = x \cdot f\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) - \tfrac{x}{y} f\,'\left(\tfrac{x+y}{xy}\right)$$

_______________________________________0.4

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = xy^2 \cdot f\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) - xyf\,'\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) \qquad (2)$$

_______________________________________0.2

Restando (1) - (2) :

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 y - xy^2\right) \cdot f\left(\tfrac{x+y}{xy}\right) = xy(x-y) f\left(\tfrac{x+y}{xy}\right)$$

Luego

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = (x-y)xyf\left(\tfrac{x+y}{xy}\right)$$

_______________________________________0.6

De esta identidad se tiene que $G(x, y) = x - y$

_______________________________________0.2

PREGUNTA 3. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, hallar los valores extremos (máximo y mínimo) de la función $f(x, y) = ax^2 + by^2$ con $a \neq b$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = c^2$ con $c > 0$. Analizar los casos $a > b$ y $b > a$.

DESARROLLO

Se define $F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + \lambda(x^2 + y^2 - c^2)$

$$\begin{array}{llll} F_x = 2ax + 2\lambda x = 0 & \Leftrightarrow & 2x(a+\lambda) = 0 & (1) \\ F_y = 2by + 2\lambda y = 0 & \Leftrightarrow & 2y(b+\lambda) = 0 & (2) \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - c^2 = 0 & \Leftrightarrow & x^2 + y^2 = c^2 & (3) \end{array}$$

_______________________________________0.5

Análisis:

Si $\lambda = -b$ $\quad y \quad$ $a \neq b \Rightarrow$ De (1) $\quad x = 0$
De (3) $\quad y = \pm c$
Se obtienen dos puntos críticos: $P_1 = (0, c)$, $P_2 = (0, -c)$

_______________________________________0.3

Si $\lambda = -a$ $\quad y \quad$ $a \neq b \Rightarrow$ De (2) $\quad y = 0$
De (3) $\quad x = \pm c$
Se obtienen dos nuevos puntos críticos: $P_3 = (c, 0)$, $P_4 = (-c, 0)$

_______________________________________0.3

Evaluando:

$f(P_1) = f(P_2) = bc^2 \quad y \quad f(P_3) = f(P_4) = ac^2$

_______________________________________0.1

Casos:
Si $a > b$ $\;f\;$ alcanza su máximo en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, y su valor mínimo en $(0, c)$ y $(0, -c)$

$f(c, 0) = f(-c, 0) = ac^2$ es máximo y
$f(0, c) = f(0, -c) = bc^2$ es mínimo.

_______________________________________0.4

Si $b > a$ $\;f\;$ alcanza su máximo en $(0, c)$ y $(0, -c)$, y su valor mínimo en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$

$f(0, c) = f(0, -c) = bc^2$ es máximo y
$f(c, 0) = f(-c, 0) = ac^2$ es mínimo.

_______________________________________0.4