U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2005

PREGUNTA 1. Sea $f:[0,\pi]\to IR$ definida por : $f(x)=x\,(\pi-x)$.

a. Encontrar una función par $F(x)$ periódica, tal que $F(x)=f(x)\ \ \forall x\in[0,\pi]$ y obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función $F(x)$.

b. Encontrar una función impar $G(x)$ periódica, tal que $G(x)=f(x)\ \ \forall x\in[0,\pi]$, y obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función $G(x)$.

c. A partir de a. y b. probar que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\qquad y\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

Desarrollo.

a. Para ello, hacemos una extensión par de $f(x)$ y luego construimos una función $F(x)$ periódica de período 2π, tal que $F(x)=f(x)\forall x\in[0,\pi]$. Calculemos ahora los coeficientes de Fourier de la función $F(x)$. Como esta función es par, tenemos que:

$$\mathrm{b}_n=0\qquad y\qquad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,(\pi-x)\,dx=\frac{\pi^2}{3}\Rightarrow \tfrac{a_0}{2}=\tfrac{\pi^2}{6}$$

____0.3

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,(\pi-x)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\left[\pi\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx-\int_0^{\pi}x^2\cos(nx)dx\right],\ \text{con } n\geq 1$$

$$a_n=\tfrac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\cos(nx)}{n^2}+\frac{x\sin(nx)}{n}\right)_0^{\pi}-\left(\frac{2x\cos(nx)}{n^2}+\left(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\sin(nx)\right)_0^{\pi}\right]$$

$$a_n=2\left[-\frac{2}{n^2}\,(1+\cos(n\pi))\right]\Rightarrow a_{2n}=-\frac{1}{n^2}\qquad a_{2n-1}=0$$

____0.3

$$\therefore F(x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}$$

____0.1

b. Ahora, hacemos una extensión impar de $f(x)$ y construimos una función $G(x)$ periódica de período 2π y tal que $G(x)=f(x)\ \ \forall x\in[0,\pi]$. Calculemos los coeficientes de Fourier de la función $G(x)$. Como esta función es impar, tenemos que: $a_0=a_n=0$, $n\geq 1$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,(\pi-x)\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\left[\pi\int_0^{\pi}x\sin(nx)dx-\int_0^{\pi}x^2\sin(nx)dx\right]$$

____0.2

Integrando por partes:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[\pi\left(\frac{\sin(nx)}{n^2}-\frac{x\cos(nx)}{n}\right)_0^{\pi}-\left(\frac{2x\sin(nx)}{n^2}+\left(\frac{2}{n^3}-\frac{x^2}{n}\right)\cos(nx)\right)_0^{\pi}\right]$$

$$b_n=-\frac{4}{\pi n^3}\left[\cos(n\pi)-1\right]\Rightarrow b_{2n}=0\ \text{ y }\ b_{2n-1}=\frac{8}{\pi\,(2n-1)^3}$$

————————————————————————————————0.4

$\therefore G(x) = \dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$

————————————————————————————————0.1

c. A partir de a. y b. tenemos:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2} \qquad y \qquad G(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

Estudiemos la Convergencia de las series en el punto $x = \frac{\pi}{2}$ que es punto de continuidad de las funciones $F(x)$ y $G(x)$.Entonces:

$$F(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

————————————————————————————————0.3

$$G(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^3} \Rightarrow \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

————————————————————————————————0.3

PREGUNTA 2. Una partícula parte del punto (0,1,0) y se desplaza según una trayectoria $\vec{r}(t)$ tal que $\vec{r}\,'(t) = (\sin t, -\cos t, 1)$.

a. Determinar $\vec{r}(t)$, t parámetro cualquiera y $\vec{r}(s)$, s parámetro longitud de arco.

b. Calcule $\hat{\mathrm{T}}$, $\hat{\mathrm{N}}$ y $\hat{\mathrm{B}}$.

c. Determine κ y τ

d. Con los datos obtenidos de la curva, diga fundamentadamente de que curva se trata y si es posible haga un bosquejo de ella.

Desarrollo.

a. Sea $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \Rightarrow$ si $\vec{r}\,'(t) = (\sin t, -\cos t, 1)$ y $r(0) = (0,1,0) \Rightarrow$

$\vec{r}(t) = (1-\cos t, 1-\sin t, t)$

————————————————————————————————0.8

$$s = \int_o^t \|(\sin u, -\cos u, 1)\|\, du = \int_o^t \sqrt{2}du = \sqrt{2}u/_o^t = \sqrt{2}t$$

$$s = \sqrt{2}t \qquad o \qquad t = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{r}(s) = \left(1-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

————————————————————————————————0.7

b. $\hat{\mathrm{T}} = \vec{r}\,'(s) \Rightarrow \;\hat{\mathrm{T}} \;= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right), 1\right)$

____0.5

$\hat{\mathrm{N}} = \dfrac{\hat{T}\,'(s)}{\left\|\hat{T}\,'(s)\right\|} \Rightarrow \hat{\mathrm{N}} = \left(\cos\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$

____0.5

$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{T}} \times \hat{\mathrm{N}} \;\Rightarrow\; \hat{\mathrm{B}} = \text{-}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right), \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

____0.5

c. $\kappa = \|r''(s)\| \Rightarrow \kappa = \left\|\left(\tfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right), \tfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)\right\| \Rightarrow \kappa = \tfrac{1}{2}$

____0.7

$\dfrac{d\hat{B}}{ds} = \tau\hat{\mathrm{N}}$ y $\dfrac{d\hat{B}}{ds} = -\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\cos\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right) = -\dfrac{1}{2}\hat{\mathrm{N}}$

$\therefore \tau = -\dfrac{1}{2}$

____0.8

d. $\kappa = \tfrac{1}{2}$ $\quad y \quad$ $\tau = -\dfrac{1}{2}$ son constantes la curva es una hélice. Además $(x-1) = -\cos t$,

____0.7

$y-1 = -\sin t \Rightarrow (x-1)^2 + (\,y-1)^2 = 1$, la hélice esta contenida en el cilindro $(x-1)^2 + (\,y-1)^2 = 1$.

____0.8

PREGUNTA 3. Un pelícano vuela siguiendo la trayectoria $\vec{r}(t) = (t - \cos t, 3 + \sin 2t, 1 - \cos 3t)$

a. Calcule la velocidad y rapidez con que se desplaza el pelícano en el instante $t = \frac{\pi}{4}$

b. En el instante $t = \frac{\pi}{2}$ el pelícano abandona la trayectoria $\vec{r}(t)$ para, siguiendo en linea recta, atrapar un pez que se encuentra en la superficie del mar. Si la superficie del mar es representada por el plano xy, determine la ubicación del pez.

c. ¿En cuanto tiempo el pelícano llega al objetivo desde el momento que abandona la trayectoria?

Desarrollo.

a. $\vec{r}(t) = (t - \cos t, 3 + \sin 2t, 1 - \cos 3t) \Rightarrow \vec{r}\,'(\frac{\pi}{4}) = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

____1.0

por lo cual $\vec{v}(\frac{\pi}{4}) = \vec{r}\,'(\frac{\pi}{4}) = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

y $\left\|\vec{v}(\frac{\pi}{4})\right\| = \sqrt{6 + \sqrt{2}}$ rapidez.

____1.0

b. $\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, 3, 1)$, $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{2}) = (2, -2, -3) \Rightarrow \left\|\vec{r}\,'(\frac{\pi}{2})\right\| = \sqrt{17}$

$l_T(t) = (\frac{\pi}{2}, 3, 1) + t(2, -2, -3) = \left(\frac{\pi}{2} + 2t, 3 - 2t, 1 - 3t\right)$

$z(t) = 1 - 3t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

$l_T(\frac{1}{3}) = \left(\frac{3\pi+4}{6}, \frac{7}{3}, 0\right)$ Ubicación del Pez.

____2.0

c. $\left\|\vec{r}\,`(\frac{\pi}{2})\right\| = \sqrt{17} \Rightarrow \hat{T}(\frac{\pi}{2}) = \left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$

$l_T(\tau) = (\frac{\pi}{2}, 3, 1) + \tau\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$

$1 - \dfrac{3}{\sqrt{17}}\tau = 0 \Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{17}}{3}$, Tiempo que tarda el pelícano en llegar al objetivo

$---$2.0