U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO

Ingeniería Civil   Primer Semestre 2006

PREGUNTA 1. Sea $f(x) = x\,(\sin x)$, si $-\pi < x < \pi$, entonces:

a. Determine la Serie de Fourier de esta función.

b. Pruebe la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}$$

Desarrollo.

a.

La función $f(x)$ es par, es decir $f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in (-\pi, \pi)$, entonces:

$b_n = 0$

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x dx = \tfrac{1}{\pi} \left[\left[x\,(-\cos x) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right] = 1$$

$$a_n = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(x) \cos(nx) dx$$

Para $n \neq 1$

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \left[\sin\left[(n+1)\,x \right] - \sin\left[(n-1)\,x \right] \right] dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}$$

Para $n = 1$

$$a_1 = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(x) \cos(x) dx = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(2x) dx = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto la serie es:

$$x \sin x = 1 - \tfrac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \cos(nx)$$

b. En $x = 0$ hay un punto de continuidad de la función, entonces la serie converge a $f(0)$

$$f(0) = 0 = 1 - \tfrac{1}{2} \cos 0 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \cos(0)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} = \frac{1}{4}$$

PREGUNTA 2. Una partícula se moviliza en el espacio IR^3 siguiendo la trayectoria descrita por

$$\vec{r}(t)=\left(2+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t, 2-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t, 1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t\right), t\in\mathrm{IR}$$

a. Pruebe que $\vec{r}(t)$ describe una circunferencia contenida en el plano $x+y-2z=2$. Indique el radio de dicha circunferencia.

b. Calcule $\hat{\mathrm{T}}$, $\hat{\mathrm{N}}$ y $\hat{\mathrm{B}}$ para todo t

Desarrollo.

a. $x=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t$

$y=2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t$

$-2z=-2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t$

$x+y-2z=4-2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos t-\cos t)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\sin t+\sin t-2\sin t)=2$

$\therefore\ \vec{r}(t)$ está contenida en el plano $x+y-2z=2$

Además:

$\vec{r}\prime(t)=\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t)-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin t), \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin t), \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t)\right)$

$\|\vec{r}\prime(t)\|=\sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t)-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin t)\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin t)\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t)\right)^2}$

Por componentes:

$\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t)-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin t)\right)^2=\tfrac{1}{2}\sin^2 t+\tfrac{1}{3}\cos^2 t-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin t\cos t$

$\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin t)\right)^2=\tfrac{1}{2}\sin^2 t+\tfrac{1}{3}\cos^2 t+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin t\cos t$

$\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t)\right)^2=\tfrac{1}{3}\cos^2 t$

Luego,

$\|\vec{r}\prime(t)\|=\sqrt{\tfrac{1}{2}\sin^2 t+\tfrac{1}{3}\cos^2 t-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin t\cos t+\tfrac{1}{2}\sin^2 t+\tfrac{1}{3}\cos^2 t+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin t\cos t+\tfrac{1}{3}\cos^2 t}$

$\|\vec{r}\prime(t)\|=\sqrt{\tfrac{2}{2}\sin^2 t+\tfrac{3}{3}\cos^2 t}=1$

$\therefore\ \|\vec{r}\prime(t)\|=1$. De esto se deduce que $t=s$ donde s parámetro longitud de arco.

Calculamos ahora

$\vec{r}\prime\prime(s)=\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos t)-\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\sin t), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos t)-\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\sin t), -\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\sin t)\right).$

Como $K(s)=\|\vec{r}\prime\prime(s)\|$ calculamos

$\|\vec{r}\prime\prime(s)\|=\sqrt{\tfrac{1}{3}\sin^2 t+\tfrac{1}{2}\cos^2 t+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin t\cos t+\tfrac{1}{3}\sin^2 t+\tfrac{1}{2}\cos^2 t-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin t\cos t+\tfrac{1}{3}\sin^2 t}$

$\|\vec{r}\prime\prime(s)\|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$

$K(s)=1$ constante por lo que $\vec{r}(t)$ describe una circunferencia.

$R = \dfrac{1}{K} \Rightarrow R = 1$ radio de la circunferencia.

b. $\hat{\mathrm{T}}$, $\hat{\mathrm{N}}$ y $\hat{\mathrm{B}}$

$$\hat{T} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin s + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cos s, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin s + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cos s, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cos s\right)$$

$$\hat{N} = \frac{\dfrac{d\hat{T}}{ds}}{\left\|\dfrac{d\hat{T}}{ds}\right\|} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos s) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\sin s), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos s) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\sin s), -\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\sin s)\right)$$

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\sin s) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\sin s) & -\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin s) \end{vmatrix}$$

$$\hat{B} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

PREGUNTA 3. Una curva **C** está determinada por la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro recto $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}$. Se pide:

a. Parametrizar la curva **C.**

b. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(0, 0, a)$

c. Determine la ecuación del plano osculador del correspondiente triedro móvil en el punto $(0, 0, a)$ de dicha curva.

Desarrollo.

a. $x - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}\cos t$; $y = \dfrac{a}{2}\sin t$ considerando al cilindro.

De la ecuación de la esfera: $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$

Reemplazando:

$$z^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}(1 + \cos t)\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\sin t\right)^2 = \frac{a^2}{2}(1 - \cos t)$$

La ecuación de la trayectoria es:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos t), \frac{a}{2}\sin t, \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 - \cos t)}\right)$$

b. Si $\vec{r}(t_o) = (0, 0, a) \Rightarrow t_o = \pi$

$$\vec{r}\prime(t) = \left(-\tfrac{1}{2}a\sin t, \tfrac{1}{2}a\cos t, \tfrac{a}{2\sqrt{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{-\cos t + 1}}\right)$$

$$\vec{r}\prime(\pi) = \left(0, -\frac{a}{2}, 0\right) = \frac{a}{2}(0, -1, 0)$$

Como $(0, -1, 0) = \hat{T}$ la ecuación de la recta tangente es:

$(x, y, z) = (0, 0, a) + t\,(0, -1, 0)$; $t \in$ **IR**

c. $$\vec{r}\prime\prime(t) = \left(-\tfrac{a}{2}\cos t, -\tfrac{a}{2}\sin t, \frac{a}{2\sqrt{2}}\frac{\cos t\sqrt{1 - \cos t} - \dfrac{\sin^2 t}{2\sqrt{1 - \cos t}}}{1 - \cos t}\right)$$

$\vec{r}''(\pi) = \left(\frac{a}{2}, 0, -\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{4}(2, 0, -1)$

$\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi)$ vector paralelo a $\hat{B}$.

$\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi) = \frac{a}{8}\,(1, 0, 2) \Rightarrow (1, 0, 2)$ es paralelo a $\hat{B}$.

Por lo tanto, la ecuación del plano osculador es:

$(x, y, z - a) \cdot (1, 0, 2) = 0$

$\Rightarrow x + 2z - 2a = 0$