## PAUTA SEGUNDA PEP

CÁLCULO AVANZADO

8 de Julio de 2005

**Pregunta 1**

Considere la función $f$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$. Se pide:

a) Calcular, si es que existen, las derivadas direccionales de f en (0,0)

b) Determinar en que dirección la derivada direccional de f en (1,1) es igual a cero.

**Solución:**

a) Sea $\overrightarrow{u} = (a,b)$ tal que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.

Si $a^2 \neq b^2$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0) + t(a,b)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}}{t} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}$$

no existe

Si $a^2 = b^2$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0) + t(a,b)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

$\therefore si \quad a^2 = b^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = 0$

b) En (1,1), sea $\overrightarrow{u} = (a,b)$ tal que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ la dirección.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \tfrac{4}{4} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\tfrac{4}{4} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \overrightarrow{u} = (1,-1) \cdot (a,b) = a - b = 0$$

$\therefore b = a$

Respuesta: En la dirección del vector $\overrightarrow{u} = a(1,1)$

**Pregunta 2**

Probar que el sistema $u^4 - v^4 - x = 0$, $2uv - y = 0$ con $P_0 = (0,-2,1,-1)$ define implicitamente las funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ en una vecindad de (0,-2).
De este sistema calcular las derivadas $u_x, u_y, v_x, v_y$ y verificar que se cumple la ecuación:

$$vu_y + uv_y = \tfrac{1}{2}$$

**Solución:**

Definimos:
$F(x,y,u,v) = u^4 - v^4 - x = 0$
$G(x,y,u,v) = 2uv - y = 0$

a) $F_x = -1, \quad F_y = 0, \quad F_u = 4u^3, \quad F_v = -4v^3$
$G_x = 0, \quad G_y = -1, \quad G_u = 2v, \quad G_v = 2u$

Es claro que F, G y todas sus derivadas parciales primeras son contínuas (funciones polinómicas).
$F(0,-2,1,-1) = 0$
$G(0,-2,1,-1) = 0$ y además:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 4u^3 & -4v^3 \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 8(u^4 + v^4) \neq 0$$

Por lo tanto por el teorema, en alguna vecindad de $(x_o, y_o) = (0,-2)$ se define:
$u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ tal que $u(0,-2) = 1$ , $v(0,-2) = -1$.

b. Derivando las ecuaciones se tiene:

Respecto de $x$ :

$4u^3u_x - 4v^3v_x = 1$
$2vu_x + 2uv_x = 0$

Resolviendo:
$u_x = \dfrac{u}{4(u^4+v^4)} \qquad , \qquad v_x = \dfrac{-v}{4(u^4+v^4)}$

Respecto de y:

$4u^3u_y - 4v^3v_y = 0$
$2vu_y + 2uv_y = 1$

Resolviendo:
$u_y = \dfrac{v^3}{2(u^4+v^4)} \qquad , \qquad v_y = \dfrac{u^3}{2(u^4+v^4)}$

Además:

$$vu_y + uv_y = \tfrac{1}{2}\frac{v^4}{(u^4+v^4)} + \tfrac{1}{2}\frac{u^4}{2(u^4+v^4)} = \tfrac{1}{2}\frac{u^4+v^4}{u^4+v^4}$$
$$\Rightarrow vu_y + uv_y = \tfrac{1}{2}$$

**Pregunta 3**

Sea la función $f(x,y) = xy(y^2 - x^2)$
a) Determine y clasifique los puntos críticos de $f$.
b) Determine máximo y mínimo de $f$ en la región $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

**Solución:**

$f(x,y) = xy^3 - x^3y$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 - 3x^2y = (y^2 - 3x^2)y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3xy^2 - x^3 = (3y^2 - x^2)x = 0$$
$\Rightarrow (0,0)$ único punto critico.

$$H(f)(x,y) = \begin{vmatrix} -6xy & 3y^2-3x^2 \\ 3y^2-3x^2 & 6xy \end{vmatrix} \Rightarrow H(f)(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

no da información, $f(0,0) = 0$ y $f(x, \frac{x}{2}) < 0$ y $f(x, 2x) > 0$

en cualquier vecindad de (0,0).

Luego (0,0,0) es punto silla de $z = xy^3 - x^3y$

b) Estudio en la frontera.

En $l_1$ y $l_4$, $f(x,y) = 0$ para todo punto de esta frontera.

En $l_2$
Sea $h(y) = f(1,y) = y^3 - y \Rightarrow h'(y) = 3y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$punto crítico de la frontera $l_2$.

$h"(y) = 6y > 0$ para $0 < y \leq 1 \Rightarrow h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ min.

Sea $g(x) = f(x,1) = x - x^3 \Rightarrow g'(x) = 1 - 3x^2 = 0$
$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$punto crítico de la frontera $l_3$.

$g"(x) = -6x < 0$ para $0 < x \leq 1 \Rightarrow g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ max

Finalmente:
$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ es máximo

$f\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ es mínimo.

$f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = 0$